Prima esercitazione progettuale

Progetto di un solaio laterocementizio

Lezione del 20/10/2015:

Analisi delle sollecitazioni con il Metodo delle Forze

1. Definizione dei coefficienti di deformabilità
2. Soluzione della trave continua che schematizza il solaio

METODO DELLE FORZE

1. Definizione dei parametri di deformabilità

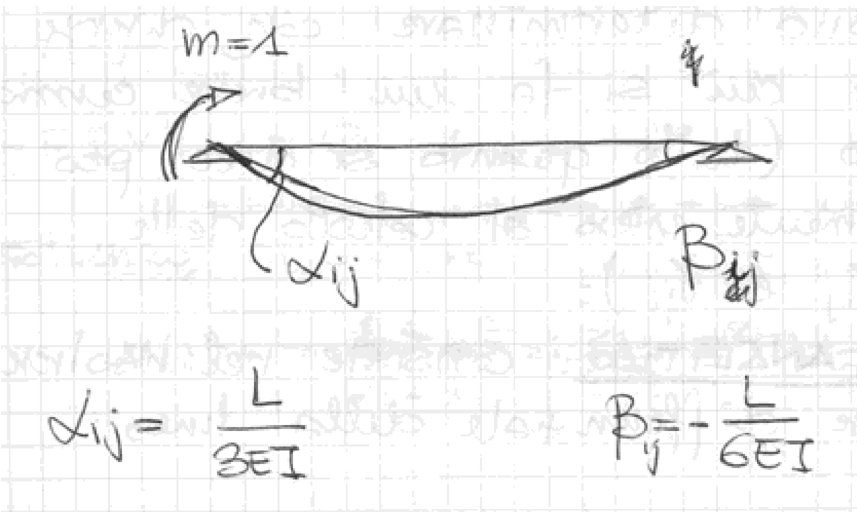
Con riferimento ad una trave semplicemente appoggiata è necessario definire i **parametri di deformabilità**.

Il calcolo dei coefficienti ed, in generale, il Metodo delle Forze per l'analisi delle strutture sarà oggetto di una parte specifica che sarà trattata nel prosieguo del corso.

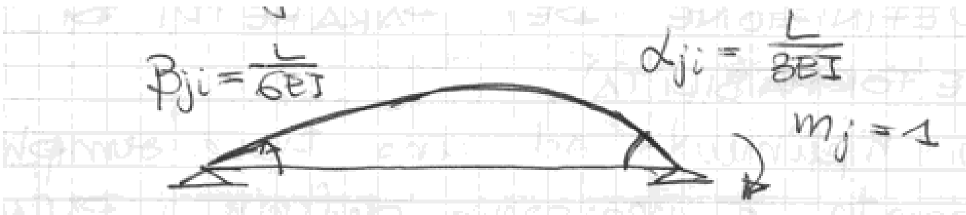
In tale sede, al fine di fornire una guida utile alla risoluzione della trave continua che schematizza il solaio con il Metodo delle Forze, si parte direttamente dalla definizione **dei parametri di deformabilità** per la trave appoggiata facendo riferimento alle sole condizioni di carico di interesse per la soluzione del solaio.

Si definiscono:

- Rotazione dovuta ad una coppia unitaria all'estremo *i*

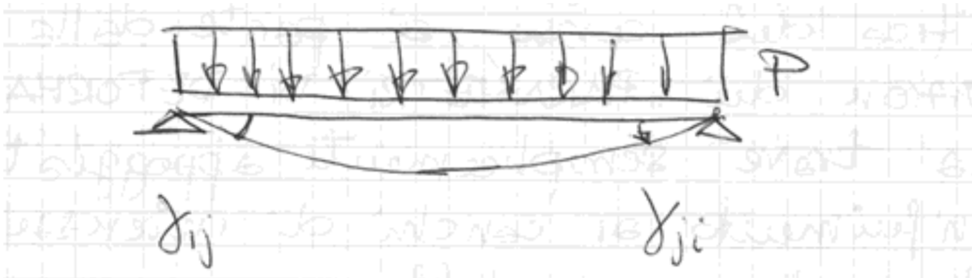


- <u>Rotazioni dovute ad una coppia unitaria applicata all'estremo *j*</u>



$$\alpha_{ji} = \frac{L}{3EI} \qquad \beta_{ji} = -\frac{L}{6EI}$$

- <u>Rotazioni dovute al carico uniformemente distribuito *p*</u>



$$\gamma_{ij} = \frac{pL^3}{24EI} \qquad \gamma_{ji} = -\frac{pL^3}{24EI}$$

I valori di α_{ij}, α_{ji} e β $\left(\beta = |\beta_{ij}| = |\beta_{ji}|\right)$ vengono detti **COEFFICIENTI DI DEFORMABILITA'** e possono essere determinati con una delle seguenti diverse metodologie:

- **METODO ANALITICO;**
- **METODO DELLA FORZA UNITARIA (principio dei lavori virtuali e complementari);**
- **COROLLARI DI MOHR.**

1.1. Metodo analitico per il calcolo dei coefficienti di deformabilità

Consiste nel risolvere l'equazione differenziale della linea elastica della trave:

$$v^{IV} = \frac{p(z)}{EI}$$

La soluzione completa dell'equazione nel caso di carico costante ed inerzia costante (come nel caso del solaio) è:

$$v(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \frac{p}{24EI} z^4$$

Per determinare i valori numerici delle costanti di integrazione vanno imposte opportune condizioni al contorno con riferimento alle condizioni di vincolo e di carico della trave.

Nel caso di una trave appoggiata con coppia applicata sull'estremo iniziale *i* si deve assumere un carico p = 0 ed imporre le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ -EI v''(0) = -1 \\ v(L) = 0 \\ -EI v''(L) = 0 \end{cases}$$

Dalla risoluzione del sistema si ottiene il calcolo delle costanti a0, a1, a2 e a3 e, quindi, la seguente equazione:

$$v(z) = -\frac{1}{6EI}\frac{z^3}{L} + \frac{1}{2EI}z^2 - \frac{L}{3EI}z$$

Da cui

$$\varphi(z) = -\frac{dv}{dz} = \frac{z^2}{2EIL} - \frac{z}{EI} + \frac{L}{3EI}$$

.

Data la linea elastica è quindi possibile determinare i coefficienti di deformabilità:

$$\alpha_{ij} = \varphi(0) = \frac{L}{3EI}$$

$$\beta_{ij} = \varphi(L) = -\frac{L}{6EI}$$

.

Nel caso di una coppia unitaria posizionata sull'estremo opposto, cioè l'estremo j, la risoluzione è del tutto analoga avendo cura di modificare opportunamente le condizioni al contorno.

Per le rotazioni dovute al carico bisogna imporre le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ -EI\,v''(0) = 0 \\ v(L) = 0 \\ -EI\,v''(L) = 0 \end{cases}$$

.

1.2. Metodo della forza unitaria

Deriva dall'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali Complementare.

Dato uno schema di carico (ad esempio la trave caricata con una coppia unitaria in *i*), si va a considerare uno **schema ausiliario** caricato con una "forza" nodale che sia "duale" allo "spostamento" che si vuole determinare.

Ad esempio, volendo determinare la rotazione all'estremo i per effetto della coppia unitaria, lo schema ausiliario deve essere caricato con una coppia unitaria in i.

A questo punto, imponendo l'uguaglianza tra lavoro esterno ed interno calcolato considerando gli spostamenti e le deformazioni dello schema di riferimento e le forze e le sollecitazioni dello schema ausiliario si ottiene:

$$1 \cdot \alpha_{ij} = \int_0^L \chi \cdot M_1 \, dz$$

Da cui

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{EJ} \int_0^L \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 dz = \frac{L}{3EJ}.$$

1.3. Corollari di Mohr

Il Teorema di Mohr stabilisce che:

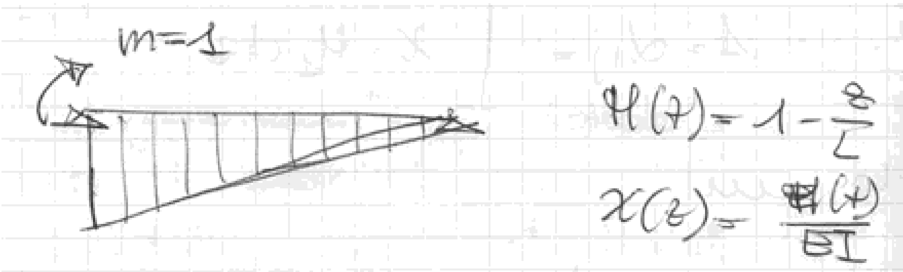
"… gli abbassamenti di una trave (detta trave reale) sono equivalenti al momento di una trave ausiliaria il cui carico è definito dal diagramma delle curvature della trave reale…".

Da tale teorema deriva il seguente corollario:

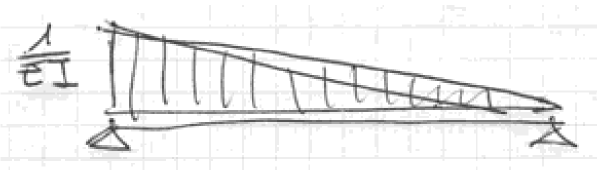
*"le **rotazioni nodali** sono pari ai valori del taglio T* della trave ausiliaria".*

Per tale corollario le rotazioni terminali sono pari alle reazioni degli appoggi sulla trave ausiliaria.

Ad esempio, con riferimento al caso della coppia nodale nell'estremo i, lo schema reale è il seguente:



Mentre lo schema ausiliario è ottenuto caricando la trave con il diagramma delle curvature:



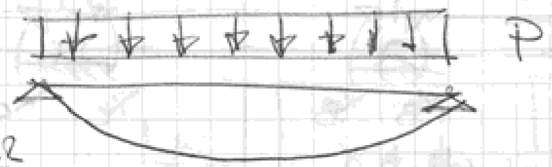
Da cui è possibile ottenere le rotazioni all'estremità (pari al taglio T* in corrispondenza dell'appoggio dello schema ausiliario):

$$\alpha_{ij} = T^*_{ij} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{EI}\cdot\frac{L}{2} = \frac{L}{3EI}$$

$$\beta_{ij} = T^*_{ji} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{EI}\cdot\frac{L}{2} = \frac{L}{6EI}$$

Anche per le rotazioni indotte dal carico si può facilmente operare con i corollari di Mohr:

– SISTEMA "REALE"



$$M = \frac{p}{2}z - \frac{p z^2}{2}$$

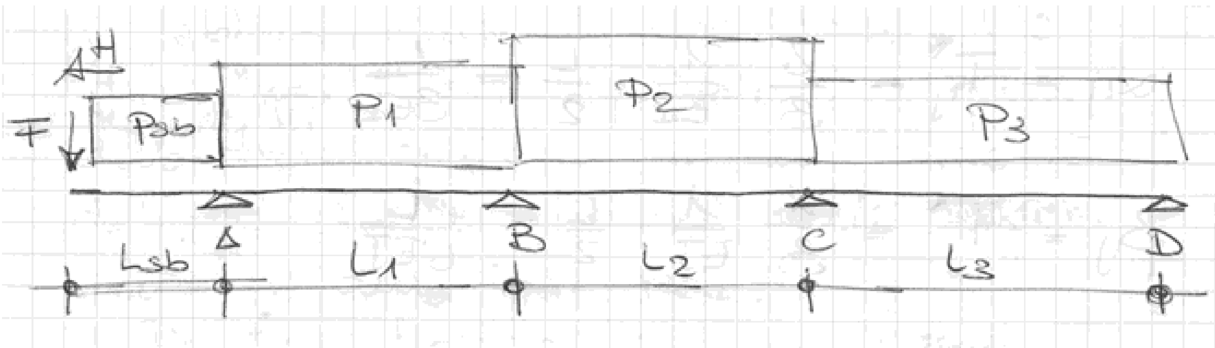
$$\chi(z) = M(z)/EI$$

– SISTEMA AUSILIARIO

$$|\gamma_{ij}| = T^*_{ij} = \frac{1}{2}\cdot\frac{qL^2}{8EI}\cdot\frac{2}{3}\cdot L = \frac{qL^3}{24EI}$$

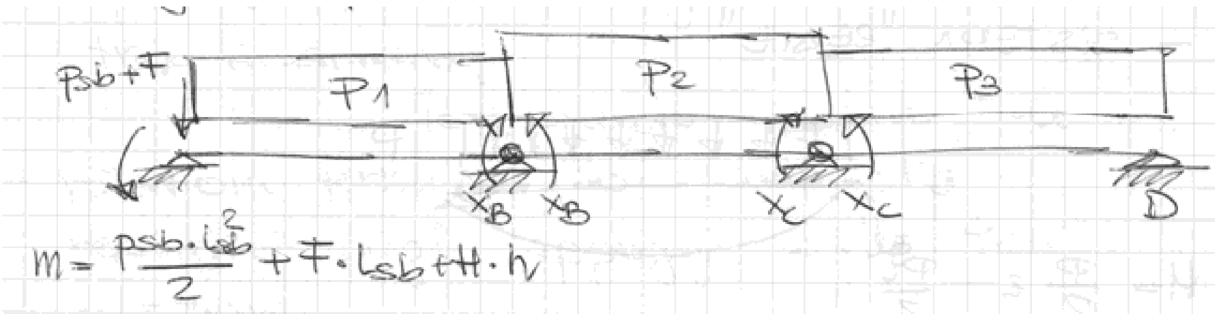
$$|\gamma_{ji}| = T^*_{ji} = \frac{1}{2}\,\frac{qL^2}{8EI}\,\frac{2}{3}\,L = \frac{qL^3}{24EI}$$

2. Soluzione dello schema di trave continua



Si consideri lo SCHEMA ISOSTATICO ASSOCIATO alla trave continua che schematizza il solaio.

Esso può essere ottenuto sconnettendo la trave rispetto alle rotazioni in B e in C ed introducendo le corrispondenti incognite iperstatiche X_B e X_C.



Inoltre, andiamo a sostituire lo sbalzo con il momento e la forza risultante.

Sullo schema isostatico tutti i valori delle X_B e X_C danno luogo a soluzioni equilibrate in quanto si inseriscono coppie uguali e contrarie.

All'interno delle infinite soluzioni equilibrate – **utilizzando il Metodo delle Forze** – bisogna ricercare la coppia di valori X_B e X_C per i quali si ha anche una soluzione **congruente,** ovvero quella soluzione per la quale risulti ripristinata la continuità della trave reale (rotazione a sx di B = alla rotazione a dx; rotazione a sx di C = uguale alla rotazione a dx).

$$\varphi_{BC} - \varphi_{BA} = 0$$
$$\varphi_{CD} - \varphi_{CB} = 0$$

Assumendo le rotazioni orarie positive, e considerando i coefficienti di deformabilità visti nella prima parte, si ottiene:

$$\varphi_{BC} = -\frac{X_B L_{BC}}{3EI} - \frac{X_C L_{BC}}{6EI} + \frac{p_2 L_{BC}^3}{24EI}$$
$$\varphi_{BA} = \frac{X_B L_{AB}}{3EI} + \frac{m L_{AB}}{6EI} - \frac{p_1 L_{AB}^3}{24EI}$$
$$\varphi_{CD} = -\frac{X_C L_{CD}}{3EI} + \frac{p_3 L_{CD}^3}{24EI}$$
$$\varphi_{CB} = \frac{X_C L_{CB}}{3EI} + \frac{X_B L_{BC}}{6EI} - \frac{p_2 L_{BC}^3}{24EI}$$

Il sistema può scriversi in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_{AB}}{3} + \frac{L_{BC}}{3} & \frac{L_{BC}}{6} \\ \frac{L_{BC}}{6} & \frac{L_{BC}}{3} + \frac{L_{CD}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ X_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_1 L_{AB}^3}{24} + \frac{p_2 L_{BC}^3}{24} - \frac{m L_{AB}}{6} \\ \frac{p_2 L_{BC}^3}{24} + \frac{p_3 L_{CD}^3}{24} \end{bmatrix}$$

La precedente scrittura matriciale può essere proposta in forma simbolica come segue:

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{X} = \underline{\delta_0}$$

Dove:

$\underline{\underline{D}}$ è la matrice di DEFORMABILITA' del sistema;

$\underline{X}$ è il vettore delle incognite iperstatiche;

$\underline{\delta_0}$ è il vettore delle rotazioni dovute ai carichi esterni nei punti B e C del sistema isostatico associato.

La soluzione del sistema si ottiene quindi dalla seguente espressione:

$$\underline{X} = \left[\underline{\underline{D}}\right]^{-1} \cdot \underline{\delta_0}$$

Per la risoluzione dello schema del solaio tenere conto che:

1. La matrice di deformabilità del sistema D (e la sua inversa D^{-1}) sono indipendenti dalla combinazione di carico.
2. Al contrario, ad ogni combinazione di carico corrisponde un valore del vettore δ_D che possiamo quindi chiamare δ_D^{COMB}

Pertanto, calcolata una volta l'invera della matrice D si può ottenere la soluzione del sistema per ogni combinazione di carico:

$$\underline{X}^{COMB} = \left[\underline{\underline{D}}\right]^{-1} \cdot \underline{\delta_0}^{COMB}$$