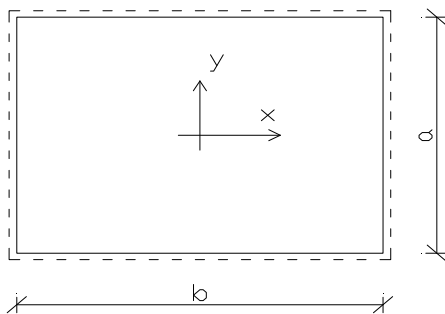


Applicazione Comparata di Metodi Risolutivi di Piastre Sottili

I. Presentazione dei casi-studio

Di seguito viene analizzata una piastra in acciaio appoggiata sui bordi con carico costante uniformemente distribuito. L'analisi viene condotta con vari metodi di risoluzione al variare del rapporto tra i lati della piastra; i risultati, in termini di spostamento del punto centrale e di momento flettente nelle due direzioni, vengono confrontati con la soluzione dedotta con uno sviluppo in serie di Fourier al 100° termine assunta come soluzione esatta.

Lo schema di calcolo è il seguente:



carico distribuito $q = 10 \frac{kN}{m^2} = 0.01 \frac{N}{mm^2}$

spessore $s = 30 \text{ mm}$

Modulo elastico $E = 210000 \text{ MPa}$

Modulo Poisson $\nu = 0.30$

I lati saranno di dimensioni variabili per tener conto di differenti configurazioni geometriche, in particolare:

Piastra quadrata (b/a=1): $a = 3000 \text{ mm}$, $b = 3000 \text{ mm}$;

Piastra rettangolare (b/a=1.5): $a = 3000 \text{ mm}$, $b = 4500 \text{ mm}$;

Piastra rettangolare (b/a=2): $a = 3000 \text{ mm}$, $b = 6000 \text{ mm}$;

Per tutte le analisi è necessario determinare la rigidezza flessionale della piastra che risulta essere:

$$D = \frac{E \cdot s^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{210000 \cdot 30^3}{12(1-0.30^2)} = 5.19 \cdot 10^8 \text{ Nmm}$$

II. Soluzione in serie di Fourier

Di seguito vengono riportati i passaggi fondamentali del calcolo effettuati con l'ausilio del software *Mathematica 5.1*.

Come prima operazione viene definito lo sviluppo in serie del carico distribuito:

$$p[i,j]=4/(a\ b)\ \text{Integrate}[\text{Integrate}[q\ \text{Sin}[i\ \text{Pi}\ x/a]\ \text{Sin}[j\ \text{Pi}\ y/b],\{y,0,b\}],\{x,0,a\}]$$

$$\frac{16\ q\ \text{Sin}\left[\frac{i\ \pi}{2}\right]^2\ \text{Sin}\left[\frac{j\ \pi}{2}\right]^2}{i\ j\ \pi^2}$$

Arrestando lo sviluppo al 9° termine si ottiene:

```
Tabella=Table[Table[p[i,j],{j,1,9}],{i,1,9}];
```

```
MatrixForm[Tabella]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{16q}{\pi^2} & 0 & \frac{16q}{3\pi^2} & 0 & \frac{16q}{5\pi^2} & 0 & \frac{16q}{7\pi^2} & 0 & \frac{16q}{9\pi^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{16q}{3\pi^2} & 0 & \frac{16q}{9\pi^2} & 0 & \frac{16q}{15\pi^2} & 0 & \frac{16q}{21\pi^2} & 0 & \frac{16q}{27\pi^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{16q}{5\pi^2} & 0 & \frac{16q}{15\pi^2} & 0 & \frac{16q}{25\pi^2} & 0 & \frac{16q}{35\pi^2} & 0 & \frac{16q}{45\pi^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{16q}{7\pi^2} & 0 & \frac{16q}{21\pi^2} & 0 & \frac{16q}{35\pi^2} & 0 & \frac{16q}{49\pi^2} & 0 & \frac{16q}{63\pi^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{16q}{9\pi^2} & 0 & \frac{16q}{27\pi^2} & 0 & \frac{16q}{45\pi^2} & 0 & \frac{16q}{63\pi^2} & 0 & \frac{16q}{81\pi^2} \end{pmatrix}$$

La soluzione in termini di spostamento risulta essere:

$$w[i,j]=p[i,j] / (\text{Pi}^4\ D\ (i^2/a^2+j^2/b^2)^2)\ \text{Sin}[i\ \text{Pi}\ x/a]\ \text{Sin}[j\ \text{Pi}\ y/b]$$

$$\frac{16\ q\ \text{Sin}\left[\frac{i\ \pi}{2}\right]^2\ \text{Sin}\left[\frac{j\ \pi}{2}\right]^2\ \text{Sin}\left[\frac{i\ \pi x}{a}\right]\ \text{Sin}\left[\frac{j\ \pi y}{b}\right]}{D\ i\ j\ \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right)^2\ \pi^6}$$

Di conseguenza la soluzione all' n-esimo termine della serie è dato dalla somma degli sviluppi in serie ai termini precedenti ad n:

$$w[n]:= \text{Sum}[\text{Sum}[w[i,j],\{j,1,n\}],\{i,1,n\}]$$

mentre lo spostamento massimo si attinge nel punto centrale della piastra, e quindi in $a/2$ e $b/2$:

$$wMax[n_]:=w[n]/\{x\rightarrow a/2,y\rightarrow b/2\}$$

A partire dagli spostamenti è possibile, per derivazione, ottenere gli sviluppi in serie anche dei momenti flettenti Mx ed My:

$$Momx[i_j_]=-D(D[D[w[i,j],x],x]+Ni(D[D[w[i,j],y],y]))$$

$$-D\left(-\frac{16\ i\ q\ \sin\left[\frac{i\pi}{2}\right]^2\ \sin\left[\frac{j\pi}{2}\right]^2\ \sin\left[\frac{i\pi x}{a}\right]\ \sin\left[\frac{j\pi y}{b}\right]}{a^2\ D\ j\ \left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)^2\ \pi^4}-\frac{16\ j\ Ni\ q\ \sin\left[\frac{i\pi}{2}\right]^2\ \sin\left[\frac{j\pi}{2}\right]^2\ \sin\left[\frac{i\pi x}{a}\right]\ \sin\left[\frac{j\pi y}{b}\right]}{b^2\ D\ i\ \left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)^2\ \pi^4}\right)$$

$$Momy[i_j_]=-D(D[D[w[i,j],y],y]+Ni(D[D[w[i,j],x],x]))$$

$$-D\left(-\frac{16\ j\ q\ \sin\left[\frac{i\pi}{2}\right]^2\ \sin\left[\frac{j\pi}{2}\right]^2\ \sin\left[\frac{i\pi x}{a}\right]\ \sin\left[\frac{j\pi y}{b}\right]}{b^2\ D\ i\ \left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)^2\ \pi^4}-\frac{16\ i\ Ni\ q\ \sin\left[\frac{i\pi}{2}\right]^2\ \sin\left[\frac{j\pi}{2}\right]^2\ \sin\left[\frac{i\pi x}{a}\right]\ \sin\left[\frac{j\pi y}{b}\right]}{a^2\ D\ j\ \left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)^2\ \pi^4}\right)$$

$$Momx[n_]:=Sum[Sum[Momx[i,j],{j,1,n}],{i,1,n}]$$

$$Momy[n_]:=Sum[Sum[Momy[i,j],{j,1,n}],{i,1,n}]$$

$$MomxMax[n_]:=Momx[n]/\{x\rightarrow a/2,y\rightarrow b/2\}$$

$$MomxMay[n_]:=Momy[n]/\{x\rightarrow a/2,y\rightarrow b/2\}$$

A tal punto, inserendo i dati numerici, è possibile determinare la soluzione allo sviluppo n-esimo.

II.1 Piastra Quadrata (b/a=1)

Dati Numerici

aNum=3000;

bNum=3000;

sNum=30;

ModE=210000;

ModNi=.3;

DNum=ModE/(1-ModNi^2) sNum^3/12;

qNum=.01;

wNum[n_]:=w[n]/\{a→aNum,b→bNum,D→DNum,q→qNum\}

wNumSeries=Table[wNum[i],{i,1,100}];

wMaxNum[n_]:=wNum[n]/\{x→aNum/2,y→bNum/2\}

MomxNum[n_]:=Momx[n]/\{a→aNum,b→bNum,D→DNum,q→qNum,Ni→ModNi\}

MomxNumSeries=Table[MomxNum[i],{i,1,100}];

$\text{MomxMaxNum}[n_]:= \text{MomxNum}[n]/\{x \rightarrow a\text{Num}/2, y \rightarrow b\text{Num}/2\}$

$\text{MomyNum}[n_]:= \text{Momy}[n]/\{a \rightarrow a\text{Num}, b \rightarrow b\text{Num}, D \rightarrow D\text{Num}, q \rightarrow q\text{Num}, Ni \rightarrow \text{ModNi}\}$

$\text{MomyNumSeries} = \text{Table}[\text{MomyNum}[i], \{i, 1, 100\}];$

$\text{MomyMaxNum}[n_]:= \text{MomyNum}[n]/\{x \rightarrow a\text{Num}/2, y \rightarrow b\text{Num}/2\}$

II.1.1 Soluzione esatta (sviluppo $n=100$)

$w\text{MaxNum}[100] = 6.33727$

$\text{MomxMaxNum}[100] = 4309.77$

$\text{MomyMaxNum}[100] = 4309.77$

II.1.2 Soluzione sviluppo $n=1$

$w\text{MaxNum}[1] = 6.49061$

$\text{MomxMaxNum}[1] = 4804.48$

$\text{MomyMaxNum}[1] = 4804.48$

II.1.3 Soluzione sviluppo $n=3$

$w\text{MaxNum}[3] = 6.32643$

$\text{MomxMaxNum}[3] = 4223.2$

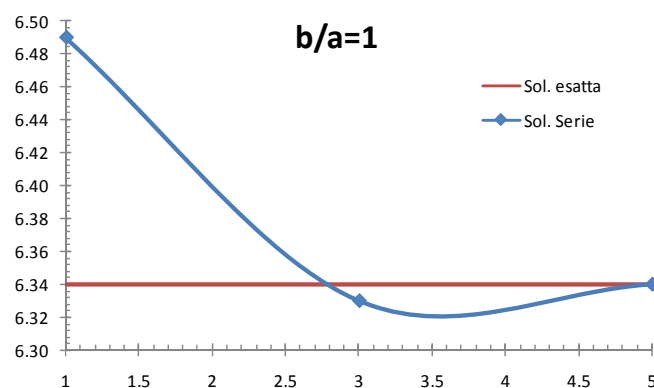
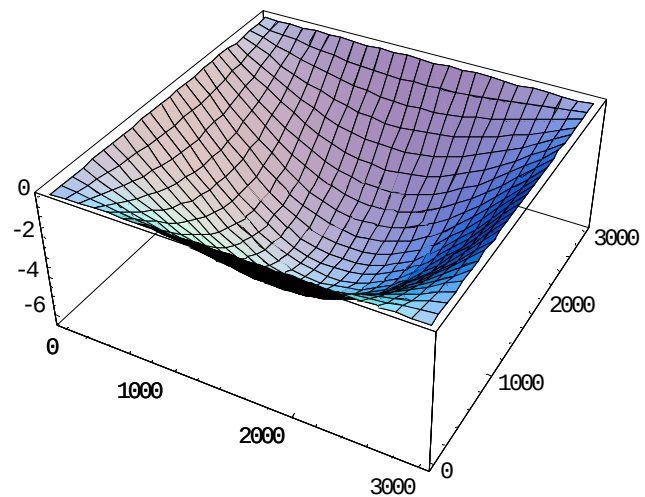
$\text{MomyMaxNum}[3] = 4223.2$

II.1.4 Soluzione sviluppo $n=5$

$w\text{MaxNum}[5] = 6.33921$

$\text{MomxMaxNum}[5] = 4341.03$

$\text{MomyMaxNum}[5] = 4341.03$



II.2 Piastra Rettangolare ($b/a=1.5$)

L'applicazione è del tutto analoga a quella effettuata in precedenza per la piastra quadrata variando soltanto la dimensione della base:

bNum=4500;

di seguito si riportano direttamente i risultati ottenuti:

II.2.1 Soluzione esatta (sviluppo $n=100$)

wMaxNum[100] = 12.0495

MomxMaxNum[100] = 7304.4

MomyMaxNum[100] = 4485.83

II.2.2 Soluzione sviluppo $n=1$

wMaxNum[1] = 12.4435

MomxMaxNum[1] = 8030.06

MomyMaxNum[1] = 5274.65

II.2.3 Soluzione sviluppo $n=3$

wMaxNum[3] = 12.0174

MomxMaxNum[3] = 7191.0

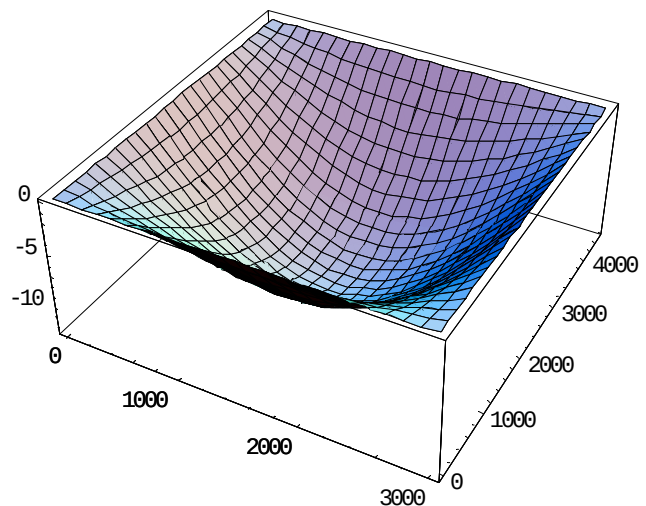
MomyMaxNum[3] = 4318.5

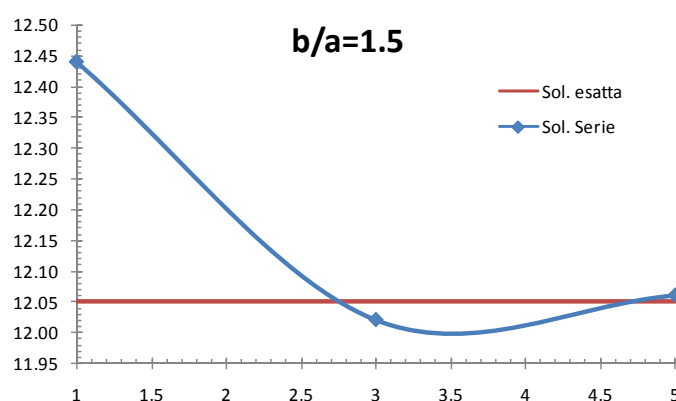
II.2.4 Soluzione sviluppo $n=5$

wMaxNum[5] = 12.0553

MomxMaxNum[5] = 7345.22

MomyMaxNum[5] = 4546.1





II.3 Piastra Rettangolare ($b/a=2$)

bNum=4500;

di seguito si riportano direttamente i risultati ottenuti:

II.3.1 Soluzione esatta (sviluppo $n=100$)

wMaxNum[100] = 15.8007

MomxMaxNum[100] = 9151.46

MomyMaxNum[100] = 4171.5

II.3.2 Soluzione sviluppo $n=1$

wMaxNum[1] = 16.616

MomxMaxNum[1] = 10170.7

MomyMaxNum[1] = 5203.62

II.3.3 Soluzione sviluppo $n=3$

wMaxNum[3] = 15.7183

MomxMaxNum[3] = 8992.21

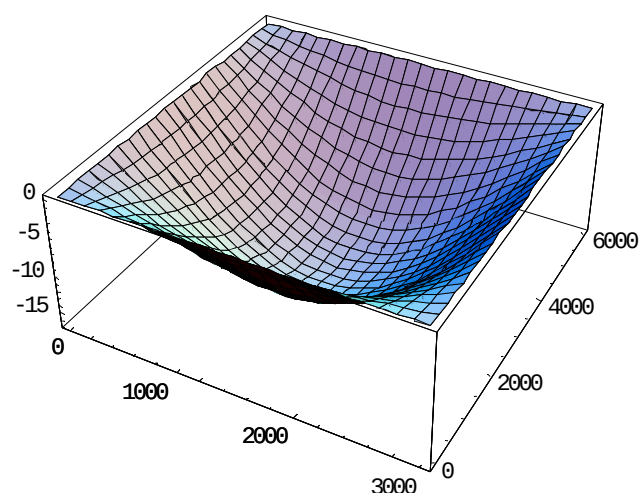
MomyMaxNum[3] = 3908.33

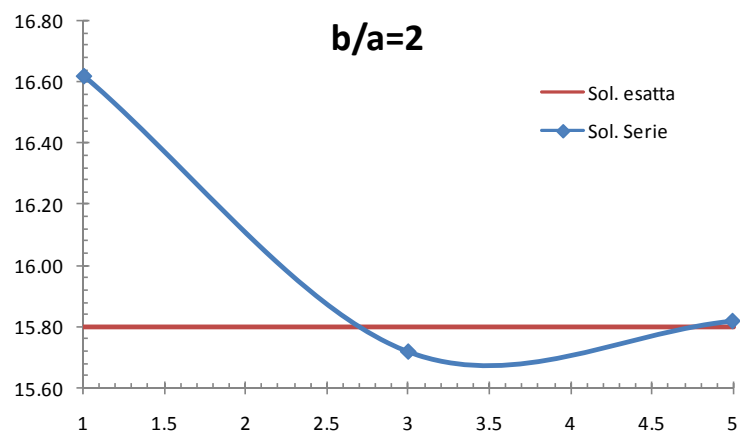
II.3.4 Soluzione sviluppo $n=5$

wMaxNum[5] = 15.8165

MomxMaxNum[5] = 9206.32

MomyMaxNum[5] = 4270.16





III. Soluzione in serie di Fourier approssimata da abachi

Nello spirito della risoluzione in serie di Fourier è possibile raggruppare i termini dello sviluppo in coefficienti funzione del rapporto tra i lati, del tipo di vincolo e del carico. In letteratura, su abachi e prontuari, sono disponibili diverse tabelle riportanti i coefficienti relativi all'approssimazione dello sviluppo in serie; di seguito si riportano le formule e gli stralci di tabella, relativi alle condizioni di vincolo e carico in esame, estrapolata da un comune manuale professionale:

$$w_{\max} = c_f \frac{p_o a^4}{D}$$

$b/a =$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
$c_f =$	0.00406	0.00485	0.00564	0.00638	0.00705	0.00772	0.00830	0.00883
$b/a =$	1.8	1.9	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	∞
$c_f =$	0.00931	0.00974	0.01013	0.01150	0.01223	0.01282	0.01297	0.01302

$$M_{x,\max} = (c_1 + \nu c_2) p_o a^2$$

$$M_{y,\max} = (c_2 + \nu c_1) p_o a^2$$

$b/a =$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$c_1 =$	0.0368	0.0447	0.0524	0.0597	0.0665	0.0728
$c_2 =$	0.0368	0.0359	0.0344	0.0324	0.0303	0.0280
$b/a =$	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	∞
$c_1 =$	0.0785	0.0837	0.0885	0.0927	0.0965	0.1250
$c_2 =$	0.0257	0.0235	0.0213	0.0193	0.0174	0

III.1 Piastra Quadrata ($b/a=1$)

$$w_{\max} = c_f \frac{p_o a^4}{D} = 0.00406 \frac{0.01 \cdot 3000^4}{5.19 \cdot 10^8} = 6.33 \text{ mm}$$

$$M_{x,\max} = (c_1 + \nu c_2) p_o a^2 = (0.0368 + 0.30 \cdot 0.0368) 0.01 \cdot 3000^2 = 4306 \text{ Nmm / mm} \rightarrow 4.31 \text{ kNm / m}$$

$$M_{y,\max} = (c_2 + \nu c_1) p_o a^2 = (0.0368 + 0.30 \cdot 0.0368) 0.01 \cdot 3000^2 = 4306 \text{ Nmm / mm} \rightarrow 4.31 \text{ kNm / m}$$

III.2 Piastra Rettangolare ($b/a=1.5$)

$$w_{\max} = c_f \frac{p_o a^4}{D} = 0.00772 \frac{0.01 \cdot 3000^4}{5.19 \cdot 10^8} = 12.04 \text{ mm}$$

$$M_{X,\max} = (c_1 + \nu c_2) p_o a^2 = (0.0728 + 0.30 \cdot 0.0280) 0.01 \cdot 3000^2 = 7308 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 7.31 \text{ kNm/m}$$

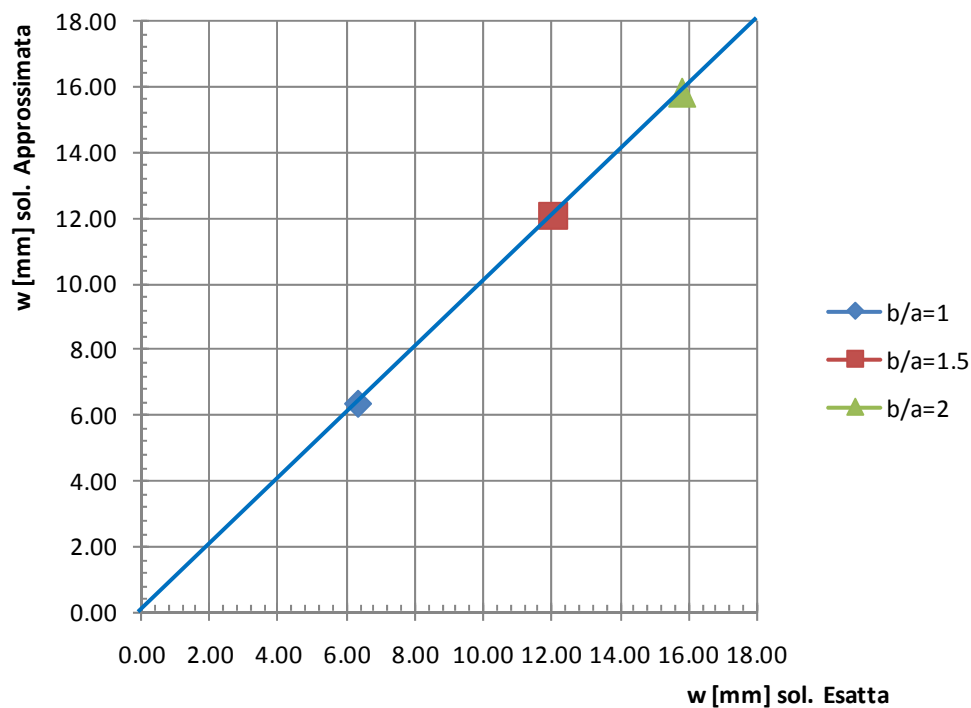
$$M_{Y,\max} = (c_2 + \nu c_1) p_o a^2 = (0.0280 + 0.30 \cdot 0.0728) 0.01 \cdot 3000^2 = 4486 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 4.49 \text{ kNm/m}$$

III.3 Piastra Rettangolare ($b/a=2$)

$$w_{\max} = c_f \frac{p_o a^4}{D} = 0.01013 \frac{0.01 \cdot 3000^4}{5.19 \cdot 10^8} = 15.80 \text{ mm}$$

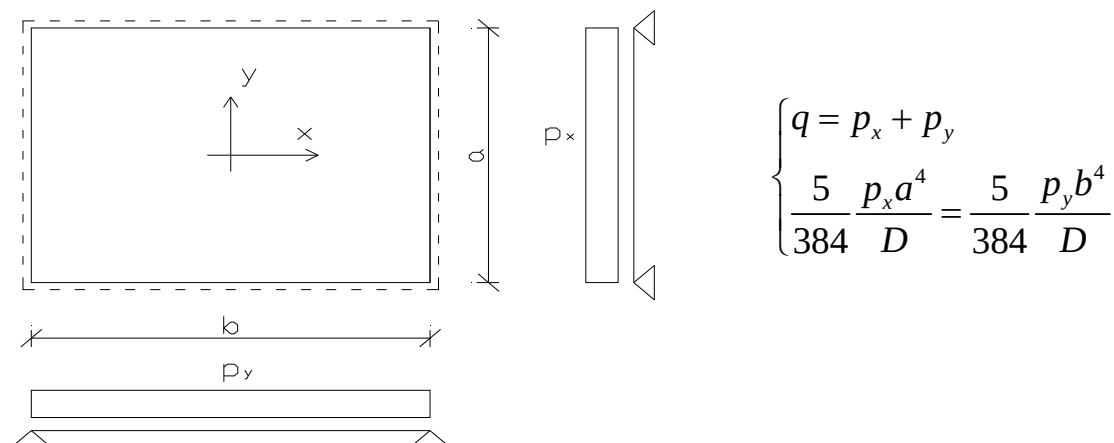
$$M_{X,\max} = (c_1 + \nu c_2) p_o a^2 = (0.0965 + 0.30 \cdot 0.0174) 0.01 \cdot 3000^2 = 9155 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 9.16 \text{ kNm/m}$$

$$M_{Y,\max} = (c_2 + \nu c_1) p_o a^2 = (0.0174 + 0.30 \cdot 0.0965) 0.01 \cdot 3000^2 = 4172 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 4.17 \text{ kNm/m}$$



IV. Metodo di Grashov

Per la risoluzione del problema secondo il metodo di Grashov si vanno a considerare due strisce di larghezza unitaria ortogonali e si impone l'equazione di congruenza nella mezzeria:



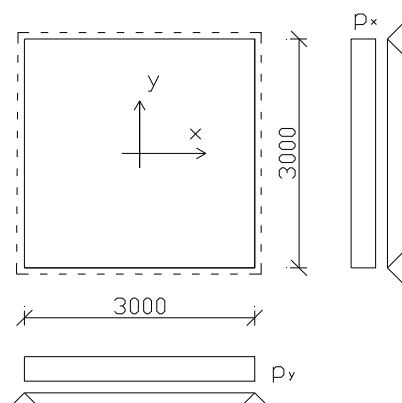
Gli spostamenti e le sollecitazioni si vanno quindi a determinare sui due schemi a trave assumendo la rigidezza flessionale della piastra:

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{p_x a^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{p_y b^4}{D}$$

$$M_{x,\max} = \frac{p_x a^2}{8}$$

$$M_{y,\max} = \frac{p_y b^2}{8}$$

IV.1 Piastra Quadrata ($b/a=1$)



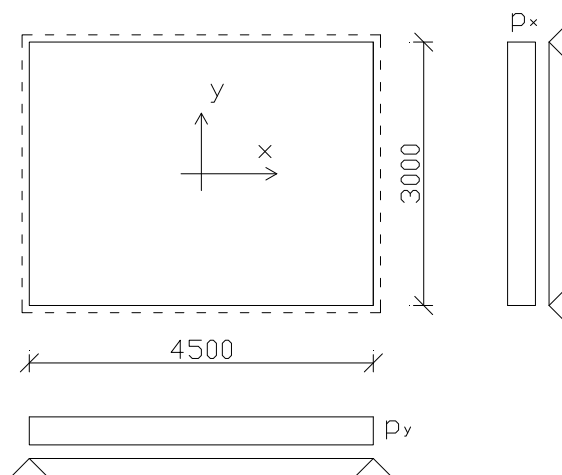
$$\begin{cases} q = p_x + p_y \\ \frac{5}{384} \frac{p_x a^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{p_y b^4}{D} \end{cases} \Rightarrow p_x = p_y = \frac{q}{2} = 0.005 \text{ N/mm}^2$$

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{p_x a^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{p_y b^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{0.005 \cdot 3000^4}{5.19 \cdot 10^8} = 10.16 \text{ mm}$$

$$M_{x, \max} = \frac{p_x a^2}{8} = \frac{0.005 \cdot 3000^2}{8} = 5625 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 5.63 \text{ kNm/m}$$

$$M_{y, \max} = \frac{p_y b^2}{8} = \frac{0.005 \cdot 3000^2}{8} = 5625 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 5.63 \text{ kNm/m}$$

IV.2 Piastra Rettangolare ($b/a=1.5$)



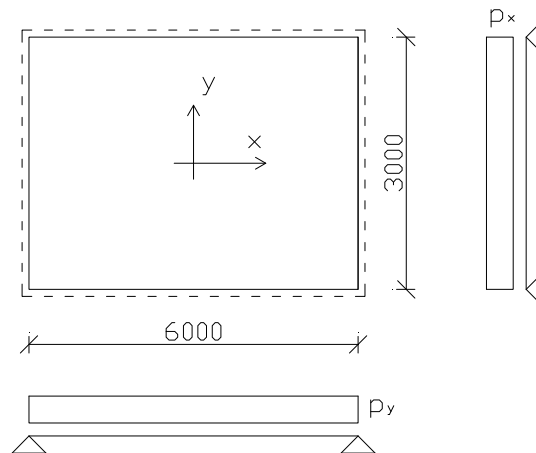
$$\begin{cases} q = p_x + p_y \\ \frac{5}{384} \frac{p_x a^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{p_y b^4}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3000^4 & -4500^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} p_x = 0.008 \text{ N/mm}^2 \\ p_y = 0.002 \text{ N/mm}^2 \end{bmatrix}$$

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{p_x a^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{p_y b^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{0.008 \cdot 3000^4}{5.19 \cdot 10^8} = \frac{5}{384} \frac{0.002 \cdot 4500^4}{5.19 \cdot 10^8} = 16.96 \text{ mm}$$

$$M_{x,\max} = \frac{p_x a^2}{8} = \frac{0.008 \cdot 3000^2}{8} = 9394 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 9.39 \text{ kNm/m}$$

$$M_{y,\max} = \frac{p_y b^2}{8} = \frac{0.002 \cdot 4500^2}{8} = 4175 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 4.18 \text{ kNm/m}$$

IV.3 Piastra Rettangolare (b/a=2)

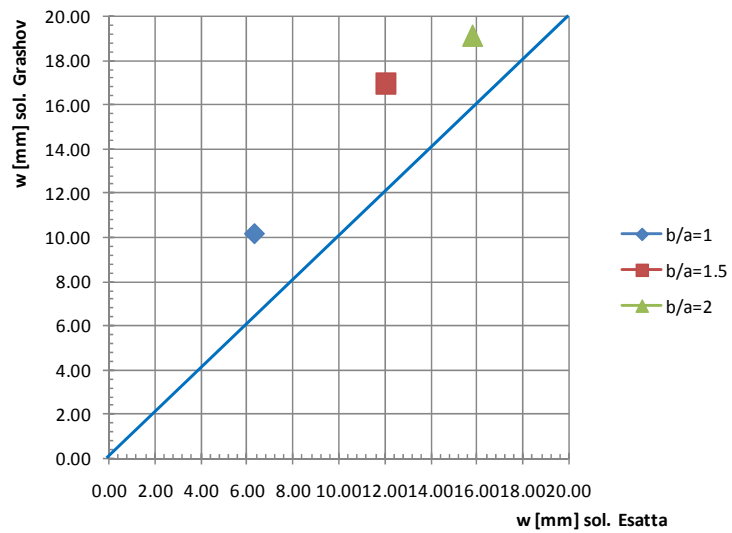


$$\begin{cases} q = p_x + p_y \\ \frac{5}{384} \frac{p_x a^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{p_y b^4}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3000^4 & -6000^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} p_x = 0.009 \text{ N/mm}^2 \\ p_y = 0.001 \text{ N/mm}^2 \end{bmatrix}$$

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{p_x a^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{p_y b^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{0.009 \cdot 3000^4}{5.19 \cdot 10^8} = \frac{5}{384} \frac{0.001 \cdot 6000^4}{5.19 \cdot 10^8} = 19.12 \text{ mm}$$

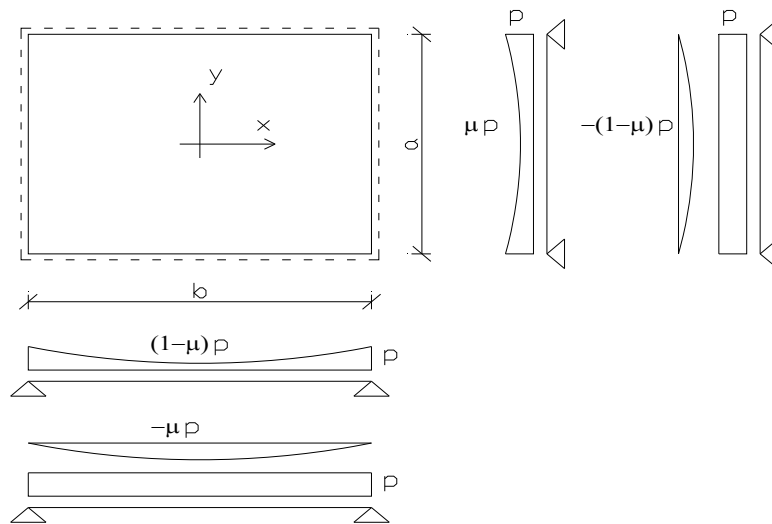
$$M_{x,\max} = \frac{p_x a^2}{8} = \frac{0.009 \cdot 3000^2}{8} = 10588 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 10.59 \text{ kNm/m}$$

$$M_{y,\max} = \frac{p_y b^2}{8} = \frac{0.001 \cdot 6000^2}{8} = 2647 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 2.65 \text{ kNm} / \text{m}$$



V Metodo di Guidi

Il metodo di Guidi tiene conto della maggiore rigidezza che la piastra ha in prossimità e corrispondenza dei vincoli; per tale motivo il carico sulle due strisce ortogonali viene assunto parabolico e con valore pari proprio al carico totale in corrispondenza dei vincoli.



Con questa schematizzazione l'incognita del problema risulta essere il solo coefficiente μ ; l'equazione risolutiva diventa quindi la sola equazione di congruenza nella mezzeria delle due travi ortogonali. Per la scrittura dell'abbassamento in mezzeria si applica la sovrapposizione degli effetti considerando che lo spostamento sia differenza tra lo spostamento che si ha in condizione di carico costante e lo stesso in condizioni di carico parabolico:

$$\frac{5}{384} \frac{pb^4}{\cancel{D}} - \frac{7}{661} \frac{\mu pb^4}{\cancel{D}} = \frac{5}{384} \frac{pa^4}{\cancel{D}} - \frac{7}{661} \frac{(1-\mu)pa^4}{\cancel{D}} \rightarrow \mu$$

V.1 Piastra Quadrata ($b/a=1$)

$$\frac{5}{384} \frac{pb^4}{\cancel{D}} - \frac{7}{661} \frac{\mu pb^4}{\cancel{D}} = \frac{5}{384} \frac{pa^4}{\cancel{D}} - \frac{7}{661} \frac{(1-\mu)pa^4}{\cancel{D}} \rightarrow \mu = 0.5$$

$$w = \frac{5}{384} \frac{pb^4}{D} - \frac{7}{661} \frac{\mu pb^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{pa^4}{D} - \frac{7}{661} \frac{(1-\mu)pa^4}{D} = 12.05 \text{ mm}$$

$$M_x = \frac{pa^2}{8} - \frac{5(1-\mu)pa^2}{48} = \frac{0.01 \cdot 3000^2}{8} - \frac{5(1-0.5)0.01 \cdot 3000^2}{48} = 6563 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 6.56 \text{ kNm/m}$$

$$M_y = \frac{pb^2}{8} - \frac{5\mu pb^2}{48} = \frac{0.01 \cdot 3000^2}{8} - \frac{5 \cdot 0.5 \cdot 0.01 \cdot 3000^2}{48} = 6563 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 6.56 \text{ kNm/m}$$

V.2 Piastra Rettangolare (b/a=1.5)

$$\frac{5}{384} \frac{pb^4}{D} - \frac{7}{661} \frac{\mu pb^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{pa^4}{D} - \frac{7}{661} \frac{(1-\mu)pa^4}{D} \rightarrow \mu = 0.99$$

$$w = \frac{5}{384} \frac{pb^4}{D} - \frac{7}{661} \frac{\mu pb^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{pa^4}{D} - \frac{7}{661} \frac{(1-\mu)pa^4}{D} = 20.13 \text{ mm}$$

$$M_x = \frac{pa^2}{8} - \frac{5(1-\mu)pa^2}{48} = \frac{0.01 \cdot 3000^2}{8} - \frac{5(1-0.99)0.01 \cdot 3000^2}{48} = 11146 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 11.15 \text{ kNm/m}$$

$$M_y = \frac{pb^2}{8} - \frac{5\mu pb^2}{48} = \frac{0.01 \cdot 4500^2}{8} - \frac{5 \cdot 0.99 \cdot 0.01 \cdot 4500^2}{48} = 4454 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 4.45 \text{ kNm/m}$$

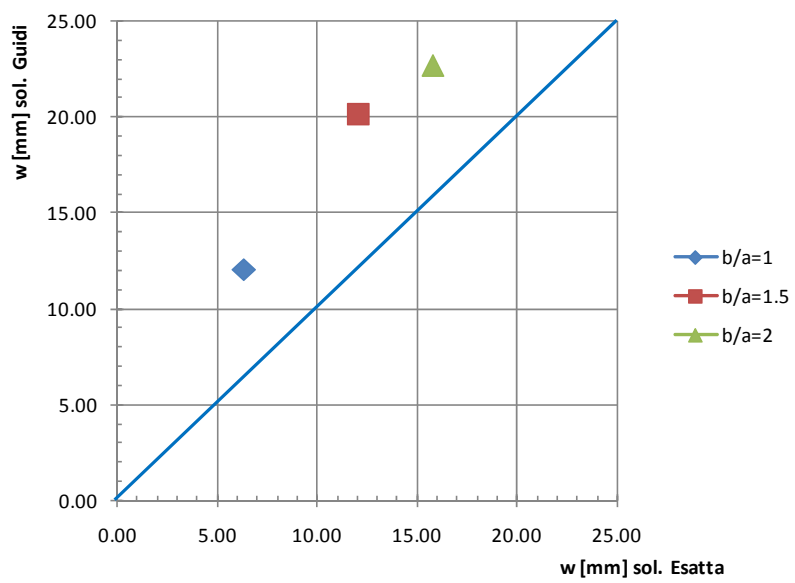
V.3 Piastra Rettangolare (b/a=2)

$$\frac{5}{384} \frac{pb^4}{D} - \frac{7}{661} \frac{\mu pb^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{pa^4}{D} - \frac{7}{661} \frac{(1-\mu)pa^4}{D} \rightarrow \mu = 1.14$$

$$w = \frac{5}{384} \frac{pb^4}{D} - \frac{7}{661} \frac{\mu pb^4}{D} = \frac{5}{384} \frac{pa^4}{D} - \frac{7}{661} \frac{(1-\mu)pa^4}{D} = 22.69 \text{ mm}$$

$$M_x = \frac{pa^2}{8} - \frac{5(1-\mu)pa^2}{48} = \frac{0.01 \cdot 3000^2}{8} - \frac{5(1-1.14)0.01 \cdot 3000^2}{48} = 12597 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 12.60 \text{ kNm/m}$$

$$M_y = \frac{pb^2}{8} - \frac{5\mu pb^2}{48} = \frac{0.01 \cdot 6000^2}{8} - \frac{5 \cdot 1.14 \cdot 0.01 \cdot 6000^2}{48} = 2111 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 2.11 \text{ kNm/m}$$



VI Metodo di Marcus

Il metodo di Marcus porta in conto la rigidezza torsionale delle fibre ortogonali alle fibre rispetto alle quali viene eseguita l'analisi. Il metodo si esplicita applicando al metodo di Grashov dei coefficienti correttivi che, considerando la maggiore rigidezza flessionale della piastra dovuta al contributo torsionale delle fibre ortogonali, comportano una riduzione dello spostamento e delle sollecitazioni rispetto alle quantità valutate secondo Grashov. I momenti flettenti valgono:

$$\begin{cases} M_x = M_{x,Grashov} (1 - \varphi_x) \\ M_y = M_{y,Grashov} (1 - \varphi_y) \end{cases}$$

Dove $M_{x,Grashov}$ e $M_{y,Grashov}$ sono le sollecitazioni determinate con il metodo di Grashov come visto nella relativa applicazione mentre φ_x e φ_y sono i coefficienti correttivi determinati come segue:

$$\begin{cases} \varphi_x = \frac{5}{6} \frac{M_{x,Grashov}}{M_{x,0}} \frac{a^2}{b^2} \\ \varphi_y = \frac{5}{6} \frac{M_{y,Grashov}}{M_{y,0}} \frac{b^2}{a^2} \end{cases}$$

I momenti $M_{x,0}$ e $M_{y,0}$ sono le sollecitazioni delle due travi ortogonali determinate considerando che su di esse gravi l'intero carico e che le condizioni di vincolo siano di semplice appoggio:

$$\begin{cases} M_{x,0} = \frac{pa^2}{8} \\ M_{y,0} = \frac{pb^2}{8} \end{cases}$$

L'abbassamento in mezzzeria è sempre dato dalla formula detta *Freccia di Marcus*:

$$w = (1 - \varphi_x) \frac{p_x a^4}{72D}$$

VI.1 Piastra Quadrata ($b/a=1$)

Dall'applicazione del metodo di Grashov abbiamo visto che:

$$M_{x,\max} = 5625 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 5.63 \text{ kNm} / \text{m}$$

$$M_{y,\max} = 5625 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 5.63 \text{ kNm} / \text{m}$$

I momenti nelle due travi per semplice appoggio sottoposte all'intero carico valgono:

$$\begin{cases} M_{x,0} = \frac{pa^2}{8} = \frac{0.01 \cdot 3000^2}{8} = 11250 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 11.25 \text{ kNm} / \text{m} \\ M_{y,0} = \frac{pb^2}{8} = \frac{0.01 \cdot 3000^2}{8} = 11250 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 11.25 \text{ kNm} / \text{m} \end{cases}$$

A questo punto è possibile determinare i coefficienti correttivi:

$$\begin{cases} \varphi_x = \frac{5}{6} \frac{M_{x,\text{Grashov}}}{M_{x,0}} \frac{a^2}{b^2} = \frac{5}{6} \frac{5625}{11250} \frac{3000^2}{3000^2} = 0.417 \\ \varphi_y = \frac{5}{6} \frac{M_{y,\text{Grashov}}}{M_{y,0}} \frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{6} \frac{5625}{11250} \frac{3000^2}{3000^2} = 0.417 \end{cases}$$

E quindi i le sollecitazioni valgono:

$$\begin{cases} M_x = M_{x,\text{Grashov}} (1 - \varphi_x) = 5625 (1 - 0.417) = 3281 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 3.28 \text{ kNm} / \text{m} \\ M_y = M_{y,\text{Grashov}} (1 - \varphi_y) = 5625 (1 - 0.417) = 3281 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 3.28 \text{ kNm} / \text{m} \end{cases}$$

La freccia in mezzzeria è pari a:

$$w = (1 - \varphi_x) \frac{p_x a^4}{72D} = (1 - 0.417) \frac{0.005 \cdot 3000^4}{72 \cdot 5.19 \cdot 10^8} = 6.32 \text{ mm}$$

VI.2 Piastra Rettangolare ($b/a=1.5$)

Dall'applicazione del metodo di Grashov abbiamo visto che:

$$M_{x,\max} = 9394 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 9.39 \text{ kNm} / \text{m}$$

$$M_{y,\max} = 4175 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 4.18 \text{ kNm} / \text{m}$$

I momenti nelle due travi per semplice appoggio sottoposte all'intero carico valgono:

$$\begin{cases} M_{x,0} = \frac{pa^2}{8} = \frac{0.01 \cdot 3000^2}{8} = 11250 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 11.25 \text{ kNm/m} \\ M_{y,0} = \frac{pb^2}{8} = \frac{0.01 \cdot 4500^2}{8} = 25313 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 25.31 \text{ kNm/m} \end{cases}$$

A questo punto è possibile determinare i coefficienti correttivi:

$$\begin{cases} \varphi_x = \frac{5}{6} \frac{M_{x,Grashov}}{M_{x,0}} \frac{a^2}{b^2} = \frac{5}{6} \frac{9394}{11250} \frac{3000^2}{4500^2} = 0.309 \\ \varphi_y = \frac{5}{6} \frac{M_{y,Grashov}}{M_{y,0}} \frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{6} \frac{4175}{25313} \frac{4500^2}{3000^2} = 0.309 \end{cases}$$

E quindi i le sollecitazioni valgono:

$$\begin{cases} M_x = M_{x,Grashov} (1 - \varphi_x) = 9394 (1 - 0.309) = 6489 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 6.49 \text{ kNm/m} \\ M_y = M_{y,Grashov} (1 - \varphi_y) = 4175 (1 - 0.309) = 2884 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 2.88 \text{ kNm/m} \end{cases}$$

La freccia in mezzzeria è pari a:

$$w = (1 - \varphi_x) \frac{p_x a^4}{72D} = (1 - 0.417) \frac{0.008 \cdot 3000^4}{72 \cdot 5.19 \cdot 10^8} = 12.50 \text{ mm}$$

VI.2 Piastra Rettangolare ($b/a=2$)

Dall'applicazione del metodo di Grashov abbiamo visto che:

$$M_{x,\max} = 10588 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 10.59 \text{ kNm/m}$$

$$M_{y,\max} = 2647 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 2.65 \text{ kNm/m}$$

I momenti nelle due travi per semplice appoggio sottoposte all'intero carico valgono:

$$\begin{cases} M_{x,0} = \frac{pa^2}{8} = \frac{0.01 \cdot 3000^2}{8} = 11250 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 11.25 \text{ kNm/m} \\ M_{y,0} = \frac{pb^2}{8} = \frac{0.01 \cdot 6000^2}{8} = 45000 \text{ Nmm/mm} \rightarrow 45.00 \text{ kNm/m} \end{cases}$$

A questo punto è possibile determinare i coefficienti correttivi:

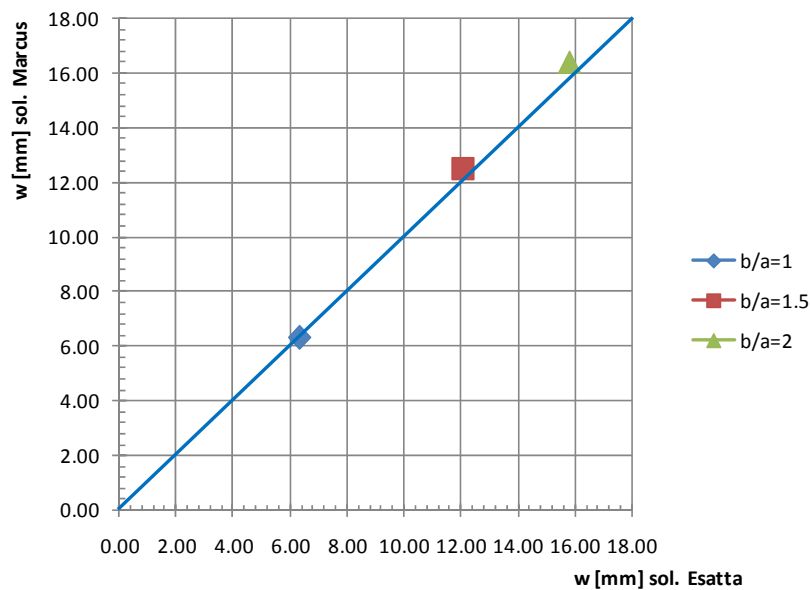
$$\begin{cases} \varphi_x = \frac{5}{6} \frac{M_{x,Grashov}}{M_{x,0}} \frac{a^2}{b^2} = \frac{5}{6} \frac{10588}{11250} \frac{3000^2}{6000^2} = 0.196 \\ \varphi_y = \frac{5}{6} \frac{M_{y,Grashov}}{M_{y,0}} \frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{6} \frac{2647}{45000} \frac{6000^2}{3000^2} = 0.196 \end{cases}$$

E quindi i le sollecitazioni valgono:

$$\begin{cases} M_x = M_{x,Grashov} (1 - \varphi_x) = 10588 (1 - 0.196) = 8512 \text{ Nmm / mm} \rightarrow 8.51 \text{ kNm / m} \\ M_y = M_{y,Grashov} (1 - \varphi_y) = 2647 (1 - 0.196) = 2128 \text{ Nmm / mm} \rightarrow 2.13 \text{ kNm / m} \end{cases}$$

La freccia in mezzeria è pari a:

$$w = (1 - \varphi_x) \frac{p_x a^4}{72D} = (1 - 0.196) \frac{0.009 \cdot 3000^4}{72 \cdot 5.19 \cdot 10^8} = 16.39 \text{ mm}$$



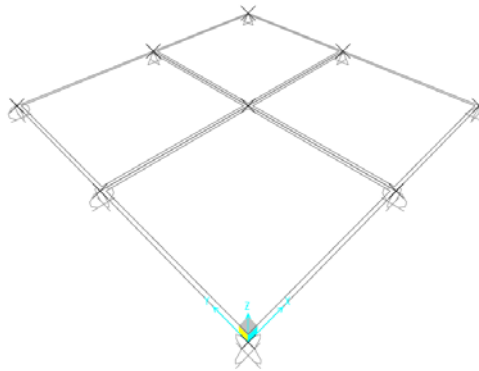
VII Metodo agli Elementi Finiti (FEM)

Per la risoluzione con il metodo agli elementi finiti ci si è avvalsi dell'ausilio del software SAP2000 discretizzando la piastra in elementi shell di lato uguale. In particolare per sottolineare l'influenza della discretizzazione si è scelto di eseguire le analisi utilizzando elementi shell di differenti dimensioni; sono state eseguite quindi analisi con shell di lato 1500, 500 e 100 mm verificando che al raffittimento della mesh corrispondesse un avvicinamento della soluzione a quella esatta.

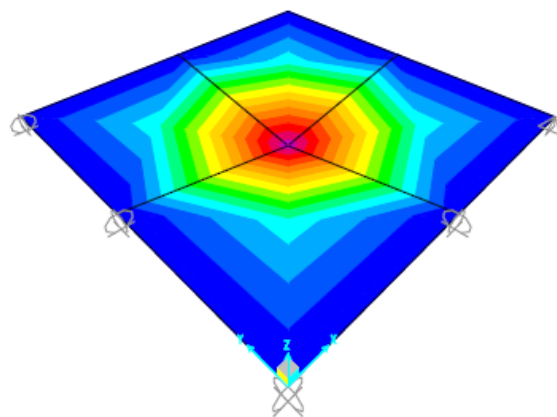
VII.1 Piastra Quadrata ($b/a=1$)

VII.1.1 Shell di lato 1500 mm (4 elementi)

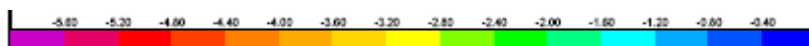
In figura si riporta la discretizzazione dell'elemento piastra in vista 3D



Lo spostamento in mezzzeria vale:



$$w = 5.91 \text{ mm}$$



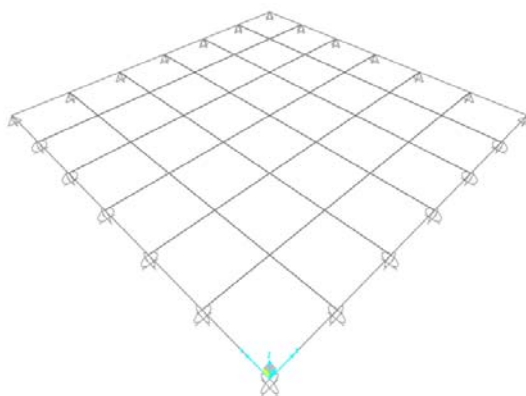
I momenti flettenti sono pari a:

$$M_x = 5514 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 5.51 \text{ kNm} / \text{m}$$

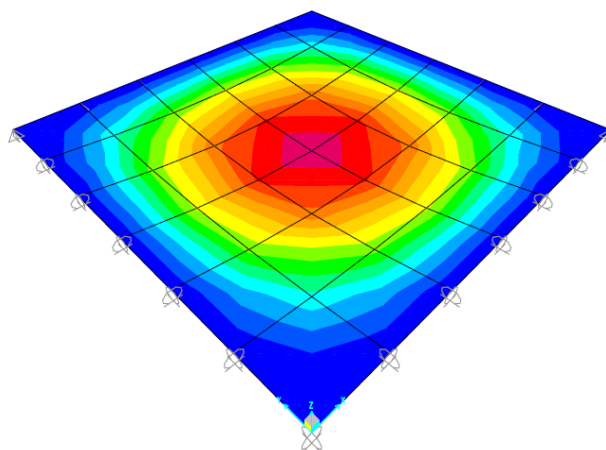
$$M_y = 5514 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 5.51 \text{ kNm} / \text{m}$$

VII.1.2 Shell di lato 500 mm (36 elementi)

In figura si riporta la discretizzazione dell'elemento piastra in vista 3D



Lo spostamento in mezzeria vale:



$$w = 6.33 \text{ mm}$$

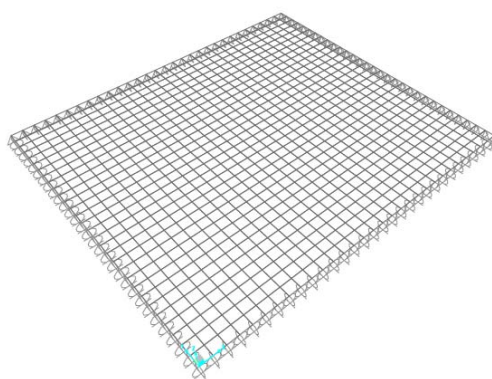
I momenti flettenti sono pari a:

$$M_x = 4392 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 4.39 \text{ kNm} / \text{m}$$

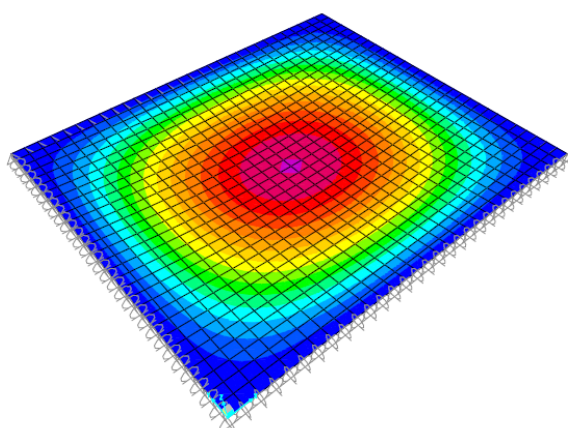
$$M_y = 4392 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 4.39 \text{ kNm} / \text{m}$$

VII.1.3 Shell di lato 100 mm (900 elementi)

In figura si riporta la discretizzazione dell'elemento piastra in vista 3D



Lo spostamento in mezzeria vale:

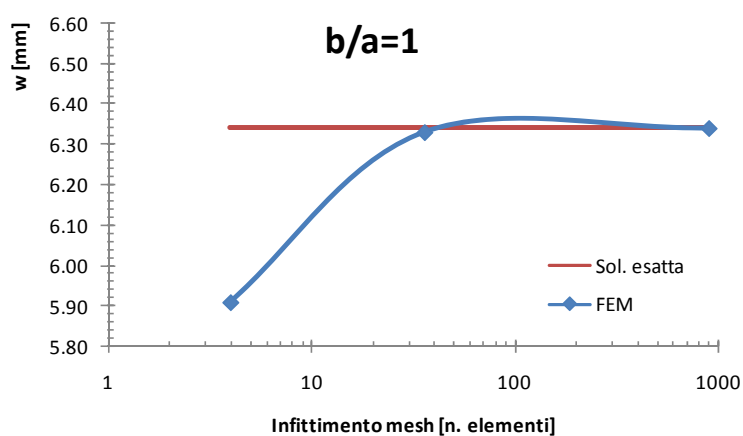


$$w = 6.34 \text{ mm}$$

I momenti flettenti sono pari a:

$$M_x = 4312 \text{ Nmm / mm} \rightarrow 4.31 \text{ kNm / m}$$

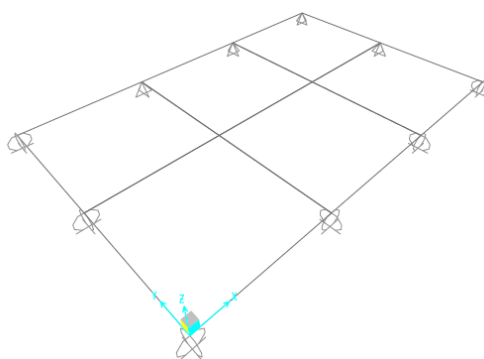
$$M_y = 4312 \text{ Nmm / mm} \rightarrow 4.31 \text{ kNm / m}$$



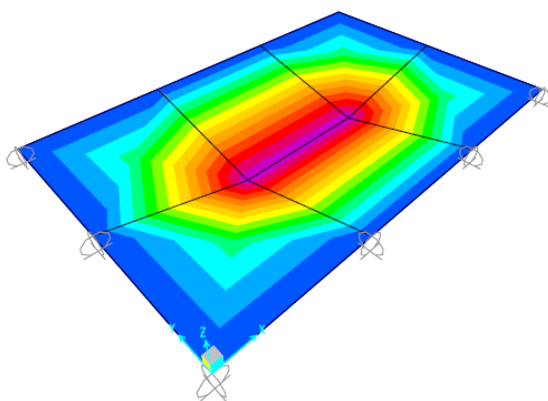
VII.2 Piastra Rettangolare ($b/a=1.5$)

VII.2.1 Shell di lato 1500 mm (6 elementi)

In figura si riporta la discretizzazione dell'elemento piastra in vista 3D



Lo spostamento in mezzeria vale:



$$w = 9.76 \text{ mm}$$

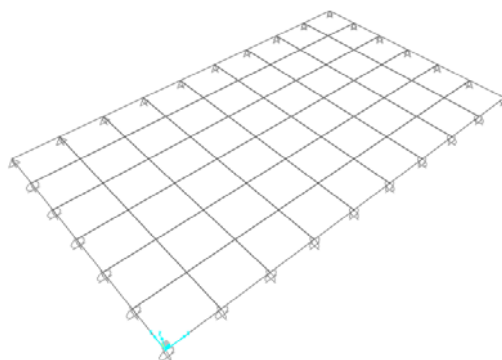
I momenti flettenti sono pari a:

$$M_x = 7680 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 7.68 \text{ kNm} / \text{m}$$

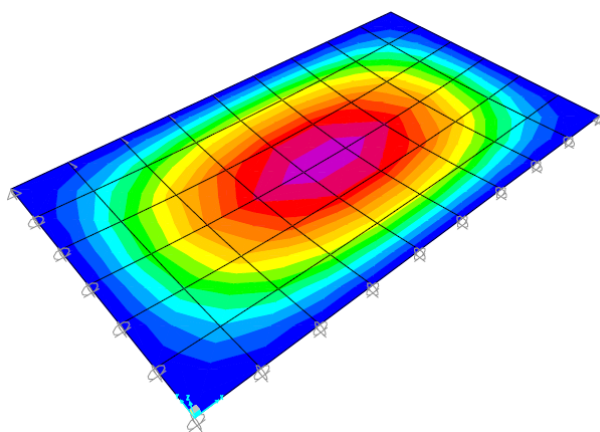
$$M_y = 4817 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 4.82 \text{ kNm} / \text{m}$$

VII.2.2 Shell di lato 500 mm (54 elementi)

In figura si riporta la discretizzazione dell'elemento piastra in vista 3D



Lo spostamento in mezzzeria vale:



$$w = 11.83 \text{ mm}$$

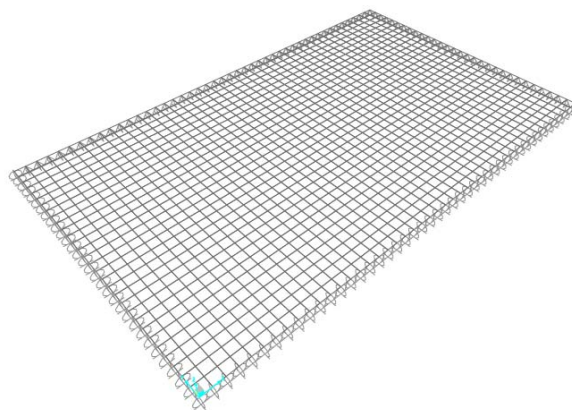
I momenti flettenti sono pari a:

$$M_x = 7328 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 7.33 \text{ kNm} / \text{m}$$

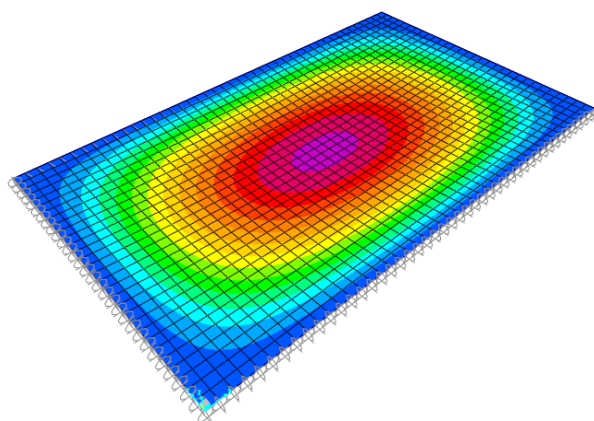
$$M_y = 4491 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 4.49 \text{ kNm} / \text{m}$$

VII.2.3 Shell di lato 100 mm (1350 elementi)

In figura si riporta la discretizzazione dell'elemento piastra in vista 3D



Lo spostamento in mezzeria vale:

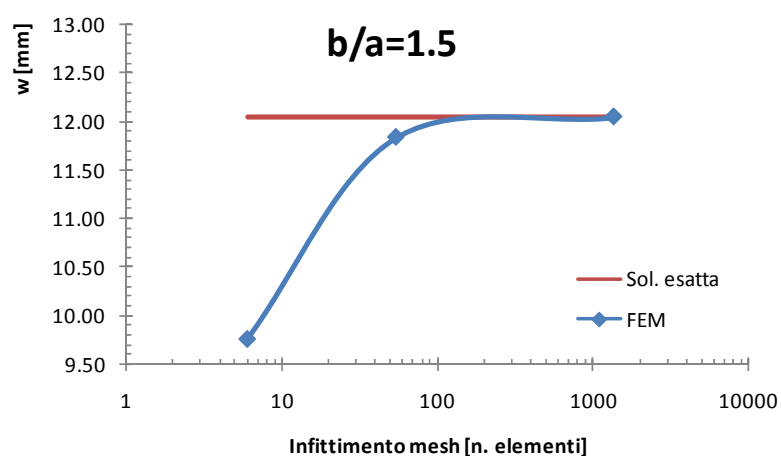


$$w = 12.04 \text{ mm}$$

I momenti flettenti sono pari a:

$$M_x = 7305 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 7.31 \text{ kNm} / \text{m}$$

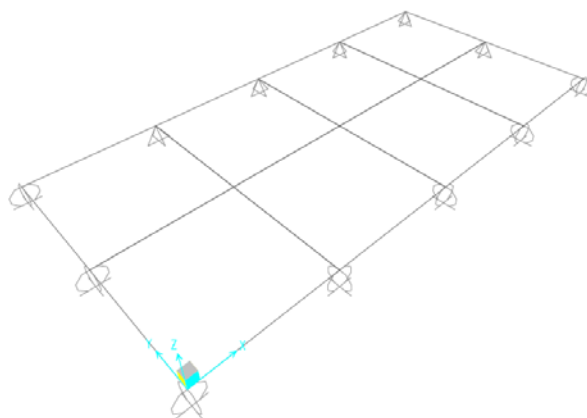
$$M_y = 4486 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 4.49 \text{ kNm} / \text{m}$$



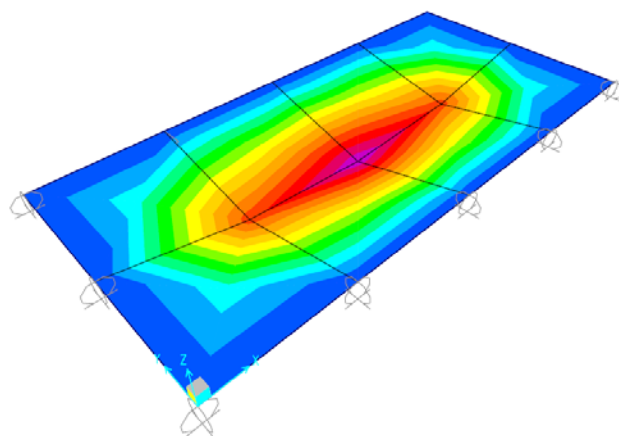
VII.3 Piastra Rettangolare ($b/a=2$)

VII.3.1 Shell di lato 1500 mm (8 elementi)

In figura si riporta la discretizzazione dell'elemento piastra in vista 3D



Lo spostamento in mezzzeria vale:



$$w = 13.94 \text{ mm}$$

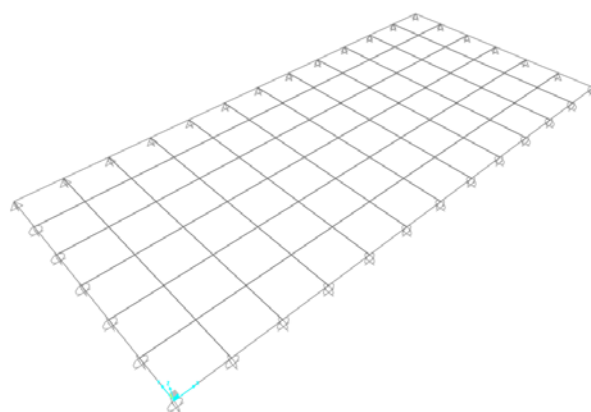
I momenti flettenti sono pari a:

$$M_x = 9994 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 9.99 \text{ kNm} / \text{m}$$

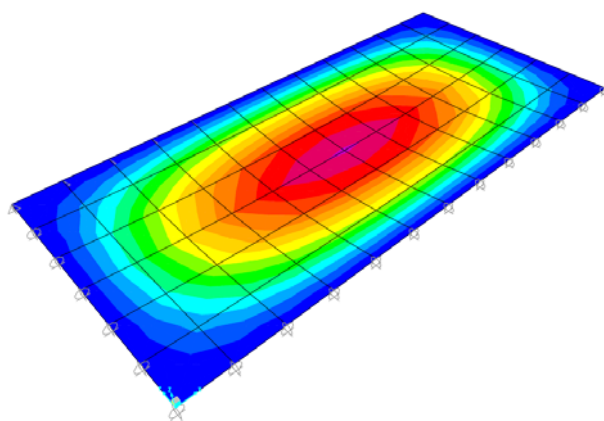
$$M_y = 4029 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 4.03 \text{ kNm} / \text{m}$$

VII.3.2 Shell di lato 500 mm (72 elementi)

In figura si riporta la discretizzazione dell'elemento piastra in vista 3D



Lo spostamento in mezzzeria vale:



$$w = 15.62 \text{ mm}$$

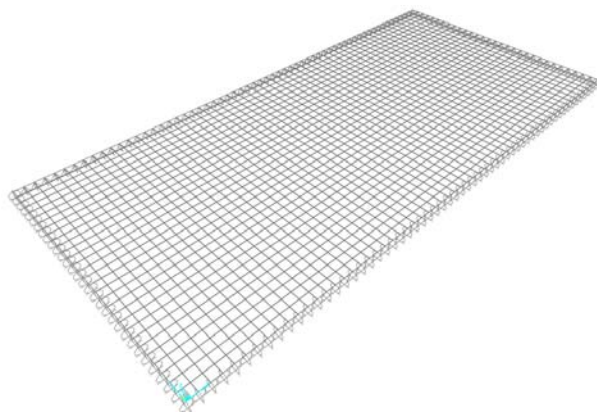
I momenti flettenti sono pari a:

$$M_x = 9239 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 9.24 \text{ kNm} / \text{m}$$

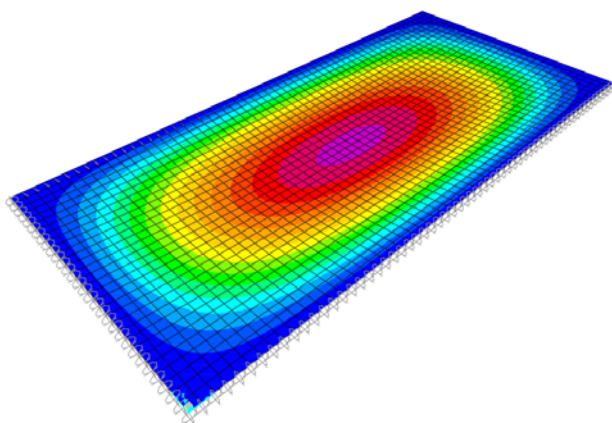
$$M_y = 4161 \text{ Nmm} / \text{mm} \rightarrow 4.16 \text{ kNm} / \text{m}$$

VII.3.3 Shell di lato 100 mm (1800 elementi)

In figura si riporta la discretizzazione dell'elemento piastra in vista 3D



Lo spostamento in mezzeria vale:

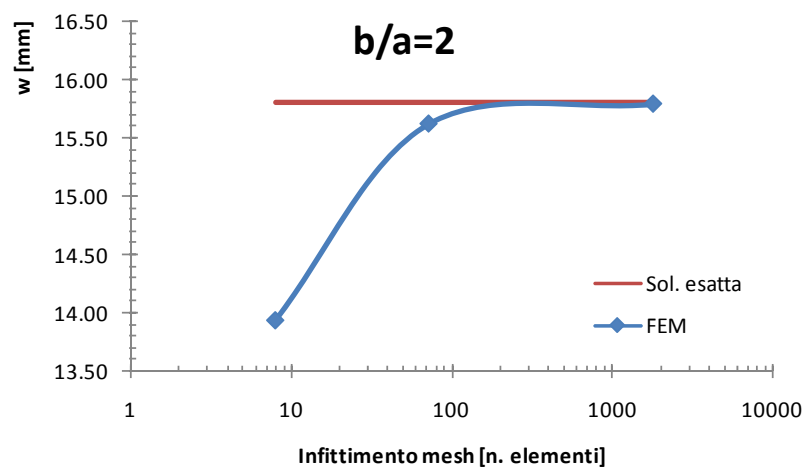


$$w = 15.79 \text{ mm}$$

I momenti flettenti sono pari a:

$$M_x = 9154 \text{ Nmm / mm} \rightarrow 9.15 \text{ kNm / m}$$

$$M_y = 4171 \text{ Nmm / mm} \rightarrow 4.17 \text{ kNm / m}$$



VIII Metodo alle Differenze Finite

Il metodo alle differenze finite prevede la discretizzazione dell'elemento piastra in un reticolo di maglia Δx per Δy e sostituire alle derivate che compongono l'equazione differenziale di Germain-Lagrange le differenze finite. Le incognite del problema a questo punto diventano i soli spostamenti in ogni punto della maglia, mentre l'equazione risolutiva si semplifica in un sistema di equazioni lineari. Al diminuire delle dimensioni della maglia le differenze finite tendono sempre più alle derivate (il limite che tende a 0 è proprio la derivata), e di conseguenza al raffittimento della maglia ci si avvicina sempre più alla soluzione esatta.

Di seguito si riportano le analisi svolte sulle piastre in esame al raffittimento della maglia eseguite con l'ausilio del software *Mathematica 5.1*.

VIII.1 Piastra Quadrata ($b/a=1$)

Dati numerici

aNum=3000;

bNum=3000;

sNum=30;

ModE=210000;

ModNi=0.3;

DNum=ModE/(1-ModNi^2) sNum^3/12

5.19231×10^8

pNum=0.01;

VIII.1.1 Maglia di lato 1500 mm

Numero di Differenze Finite e Passo

DX=1500;

DY=1500;

$n_x = b_{\text{Num}} / DX$

2

ny=aNum/DY

2

Coordinate del Reticolo di Discretizzazione

$x_0 = 0$; $x_n = bNum$; $\delta_x = (x_n - x_0) / nx$; $x_k := x_0 + k \delta_x$;
 $y_0 = 0$; $y_n = aNum$; $\delta_y = (y_n - y_0) / ny$; $y_k := y_0 + k \delta_y$;
reticolo = Table[{ x_k , x_1 }, { k , 0, nx}, { i , 0, ny}];

MultipleListPlot[reticolo, SymbolShape → PlotSymbol[Box, 1], Axes → False]

MultipleListPlot[{{{0,0},{0,1500},{0,3000}},{{1500,0},{1500,1500},{1500,3000}},{{3000,0},{3000,1500},{3000,3000}}}, SymbolShape → PlotSymbol[Box, 1], Axes → False]

Definizione delle Condizioni al Contorno

(a) $x = 0 \rightarrow w = 0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

(b) $x = 1 \rightarrow w = 0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

(c) $y = 0 \rightarrow w = 0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

(d) $y = 1 \rightarrow w = 0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

bc1a=Table[w[0,k]==0.0, {k,0,nx}];

bc2a=Table[w[-1,k]-2 w[0,k]+w[1,k]==0, {k,1,nx-1}];

bc1b=Table[w[ny,k]==0, {k,0,nx}];

bc2b=Table[w[ny-1,k]-2w[ny,k]+w[ny+1,k]==0, {k,1,nx-1}];

bc1c=Table[w[i,0]==0.0, {i,1,ny-1}];

bc2c=Table[w[i,-1]-2 w[i,0]+w[i,1]==0, {i,1,ny-1}];

bc1d=Table[w[i,nx]==0, {i,1,ny-1}];

bc2d=Table[w[i,nx-1]-2 w[i,nx]+w[i,nx+1]==0, {i,1,ny-1}];

BC=Join[bc1a,bc2a,bc1b,bc2b,bc1c,bc2c,bc1d,bc2d];

Assemblaggio delle Equazioni e Soluzione

equations=Table[w[k-2,i]-8w[k-1,i]+20 w[k,i]-8w[k+1,i]+w[k+2,i]+2 w[k-1,i-1]-8 w[k,i-1]+2 w[k+1,i-1]+2 w[k-1,i+1]-8 w[k,i+1]+2 w[k+1,i+1]+w[k,i+2]+w[k,i-2]==-pNum DX^2 DY^2/DNum, {k,1,nx-1},{i,1,ny-1}];

system=Join[equations,BC]//Flatten;

Dimensions[system]

{13}

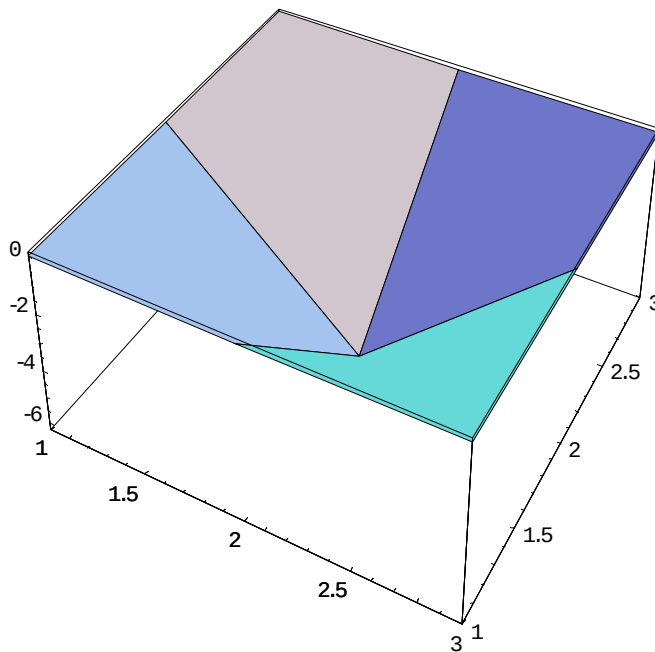
wint=Table[w[k,i], {k,0,nx},{i,0,ny}];

wxext=Table[w[k,i], {k,-1,nx+1,nx+2},{i,1,ny-1}];


```

wyext=Table[w[i,k], {k,-1,nx+1,nx+2},{i,1,ny-1}];
wvector=Join[wint,wxext,wyext]//Flatten;
Dimensions[wvector]
{13}
sol=Solve[system,wvector];
solution=Table[w[k,i]/.sol[[1]],{k,0,nx},{i,0,ny}]/N;
ListPlot3D[solution]

```



```

solution;
MatrixForm[solution]

$$\begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0. & -6.09375 & -2.76472 \times 10^{-17} \\ 0. & 2.05046 \times 10^{-16} & 0. \end{pmatrix}$$


```

```
solution[[nx/2+1,ny/2+1]]
```

```
-6.09375
```

Calcolo Momenti flettenti

```

MomentoX=-DNum(((solution[[nx/2+1,ny/2]]-2
solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+1,ny/2+2]])/DX^2)+ModNi((solution[[{nx}/2,ny/2+1]]-2
solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+2,ny/2+1]])/DY^2))
-3656.25

```

```

MomentoY=-DNum(ModNi((solution[[{nx}/2+1,ny/2]]-2
solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+1,ny/2+2]])/DX^2)+((solution[[{nx}/2,ny/2+1]]-2
solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+2,ny/2+1]])/DY^2))

```

-3656.25

VIII.1.2 Maglia di lato 500 mm

Numero di Differenze Finite e Passo

DX=500;

DY=500;

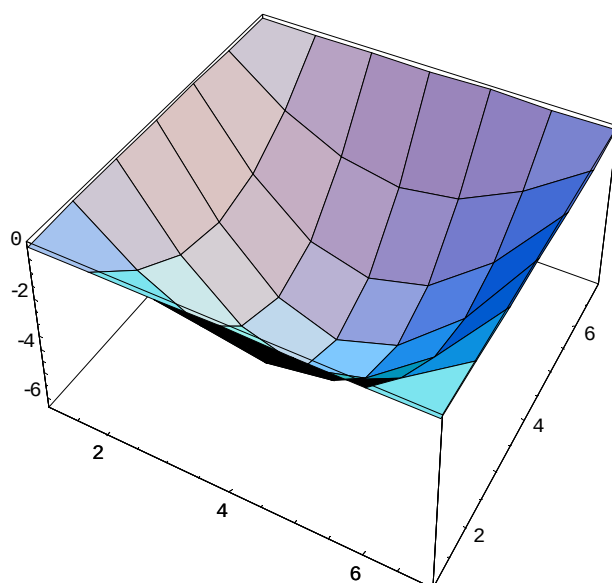
$nx = bNum/DX$

6

$ny = aNum/DY$

6

Essendo gli altri passaggi analoghi a quelli visti in precedenza si riportano di seguito direttamente i risultati ottenuti:



MatrixForm[solution]

$$\begin{pmatrix} 0. & 0. & 8.93736 \times 10^{-15} & -6.97768 \times 10^{-15} & 4.29516 \times 10^{-15} & 2.24976 \times 10^{-15} & 0. \\ 1.28384 \times 10^{-15} & -1.73233 & -2.89174 & -3.29238 & -2.89174 & -1.73233 & -2.41481 \times 10^{-15} \\ 6.06483 \times 10^{-16} & -2.89174 & -4.85243 & -5.53419 & -4.85243 & -2.89174 & 4.06234 \times 10^{-15} \\ 4.65514 \times 10^{-15} & -3.29238 & -5.53419 & -6.31544 & -5.53419 & -3.29238 & 4.02968 \times 10^{-15} \\ 4.69518 \times 10^{-16} & -2.89174 & -4.85243 & -5.53419 & -4.85243 & -2.89174 & -3.37495 \times 10^{-16} \\ 2.52942 \times 10^{-15} & -1.73233 & -2.89174 & -3.29238 & -2.89174 & -1.73233 & -3.55464 \times 10^{-16} \\ 0. & 2.69734 \times 10^{-16} & -4.89633 \times 10^{-16} & -1.02081 \times 10^{-15} & -9.2709 \times 10^{-16} & 4.18224 \times 10^{-16} & 0. \end{pmatrix}$$

solution[[nx/2+1,ny/2+1]]

-6.31544

```

MomentoX=-DNum(((solution[[nx/2+1,ny/2]]-2
solution[[nx/2+1,ny/2+1]]+solution[[nx/2+1,ny/2+2]])/DX^2)+ModNi((solution[[nx/2,ny/2+1]]-2
solution[[nx/2+1,ny/2+1]]+solution[[nx/2+2,ny/2+1]])/DY^2))

```

-4218.75

```

MomentoY=-DNum(ModNi((solution[[nx/2+1,ny/2]]-2
solution[[nx/2+1,ny/2+1]]+solution[[nx/2+1,ny/2+2]])/DX^2)+((solution[[nx/2,ny/2+1]]-2
solution[[nx/2+1,ny/2+1]]+solution[[nx/2+2,ny/2+1]])/DY^2))

```

-4218.75

VIII.1.3 *Maglia di lato 100 mm*

Numero di Differenze Finite e Passo

DX=100;

DY=100;

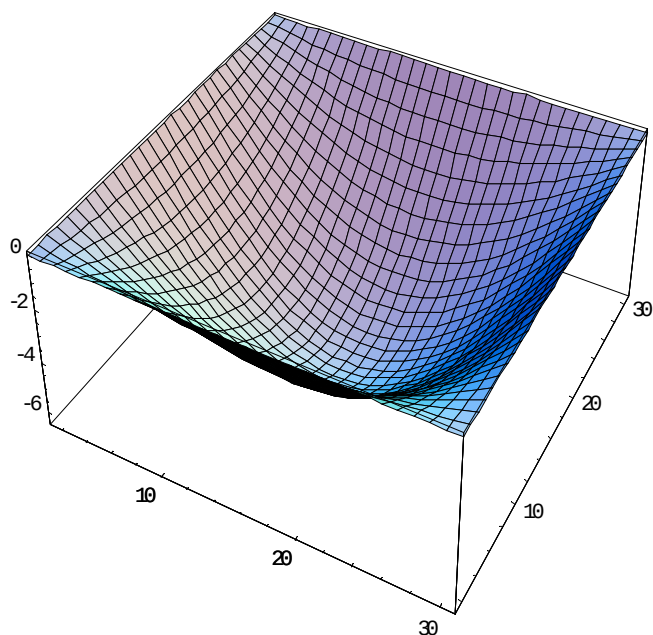
$nx = bNum/DX$

30

$ny = aNum/DY$

30

Essendo gli altri passaggi analoghi a quelli visti in precedenza si riportano di seguito direttamente i risultati ottenuti:



```

solution[[nx/2+1,ny/2+1]]

```

-6.33647

```

MomentoX=-DNum(((solution[[nx/2+1,ny/2]]-2
solution[[nx/2+1,ny/2+1]]+solution[[nx/2+1,ny/2+2]])/DX^2)+ModNi((solution[[nx/2,ny/2+1]]-2
solution[[nx/2+1,ny/2+1]]+solution[[nx/2+2,ny/2+1]])/DY^2))

```

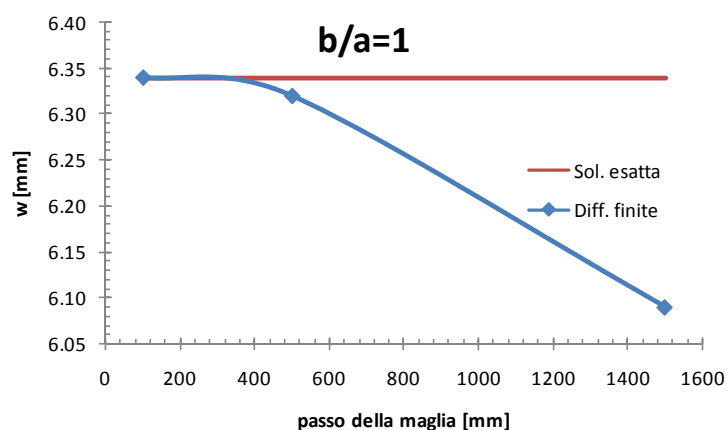
-4306.01

```

MomentoY=-DNum(ModNi((solution[[nx/2+1,ny/2]]-2
solution[[nx/2+1,ny/2+1]]+solution[[nx/2+1,ny/2+2]])/DX^2)+((solution[[nx/2,ny/2+1]]-2
solution[[nx/2+1,ny/2+1]]+solution[[nx/2+2,ny/2+1]])/DY^2))

```

-4306.01



VIII.2 Piastra Rettangolare ($b/a=1.5$)

Dati numerici

aNum=3000;

bNum=4500;

sNum=30;

ModE=210000;

ModNi=0.3;

DNum=ModE/(1-ModNi^2) sNum^3/12

5.19231×10^8

pNum=0.01;

VIII.2.1 Maglia di lato 1500 mm

Numero di Differenze Finite e Passo

DX=1500;

```

DY=1500;

nx=bNum/DX

3

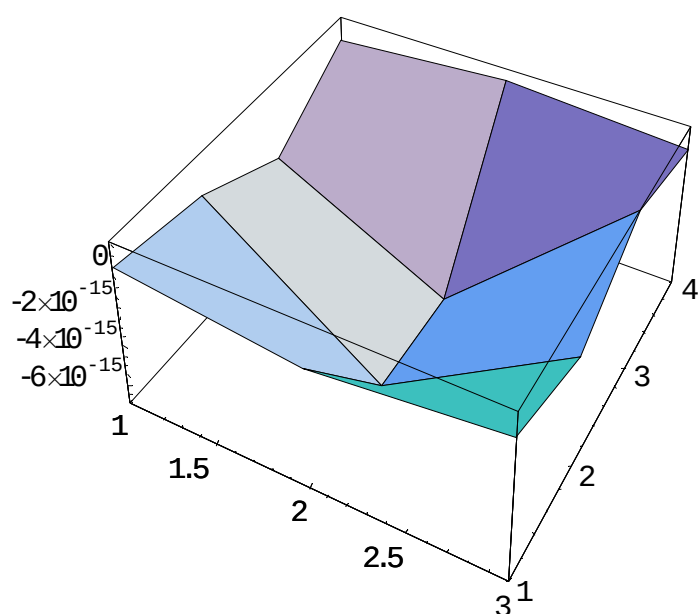
ny=aNum/DY

2

```

Essendo gli altri passaggi analoghi a quelli visti in precedenza si riportano di seguito direttamente i risultati ottenuti:

```
ListPlot3D[solution]
```



```
solution;
```

```
MatrixForm[solution]
```

$$\begin{pmatrix} 0. & -9.79665 \times 10^{-16} & 0. \\ -7.92426 \times 10^{-16} & -10.8333 & -1.35894 \times 10^{-15} \\ -2.74539 \times 10^{-15} & -10.8333 & 1.04922 \times 10^{-15} \\ 0. & 6.80678 \times 10^{-16} & 0. \end{pmatrix}$$

```
solution[[{nx+1}/2,ny/2+1]]
```

```
-10.8333
```

Calcolo Momenti flettenti

```

MomentoX=-DNum(((solution[[{nx+1}/2,ny/2]]-2
solution[[{nx+1}/2,ny/2+1]]+solution[[{nx+1}/2,ny/2+2]])/DX^2)+ModNi((solution[[{nx+1}/2-1,ny/2+1]]-2
solution[[{nx+1}/2,ny/2+1]]+solution[[{nx+1}/2+1,ny/2+1]])/DY^2))

```

```
-5750.
```

```

MomentoY=-DNum(ModNi((solution[[{nx+1}/2,ny/2]]-2
solution[[{nx+1}/2,ny/2+1]]+solution[[{nx+1}/2,ny/2+2]])/DX^2)+((solution[[{nx+1}/2-1,ny/2+1]]-2
solution[[{nx+1}/2,ny/2+1]]+solution[[{nx+1}/2+1,ny/2+1]])/DY^2))

```

-4000.

VIII.2.2 *Maglia di lato 500 mm*

Numero di Differenze Finite e Passo

DX=500;

DY=500;

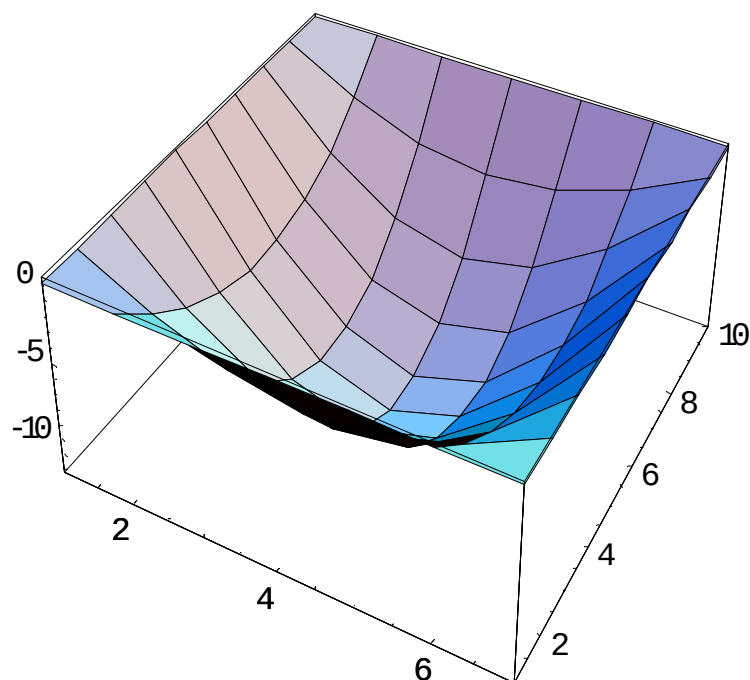
$nx = bNum/DX$

9

$ny = aNum/DY$

6

Essendo gli altri passaggi analoghi a quelli visti in precedenza si riportano di seguito direttamente i risultati ottenuti:



MatrixForm[solution]

0.	0.	1.46802×10^{-14}	-1.21322×10^{-14}	4.67492×10^{-15}	3.0853×10^{-15}	0.
1.35557×10^{-15}	-2.37614	-4.00602	-4.57858	-4.00602	-2.37614	-4.54869×10^{-15}
5.94299×10^{-16}	-4.24966	-7.20152	-8.24509	-7.20152	-4.24966	7.3787×10^{-15}
6.02208×10^{-15}	-5.49702	-9.34367	-10.7094	-9.34367	-5.49702	1.25395×10^{-14}
-6.76674×10^{-15}	-6.11311	-10.4051	-11.932	-10.4051	-6.11311	-3.39646×10^{-15}
1.18265×10^{-14}	-6.11311	-10.4051	-11.932	-10.4051	-6.11311	5.36377×10^{-15}
-8.98634×10^{-16}	-5.49702	-9.34367	-10.7094	-9.34367	-5.49702	-3.08275×10^{-16}
-4.40499×10^{-15}	-4.24966	-7.20152	-8.24509	-7.20152	-4.24966	-9.67248×10^{-15}
1.58893×10^{-17}	-2.37614	-4.00602	-4.57858	-4.00602	-2.37614	1.35859×10^{-15}
0.	7.979×10^{-16}	5.79129×10^{-17}	1.24139×10^{-15}	3.68234×10^{-16}	-6.76069×10^{-16}	0.

solution[((nx+1)/2,ny/2+1]]

-11.932

Calcolo Momenti flettenti

MomentoX=-DNum(((solution[((nx+1)/2,ny/2]]-2

solution[((nx+1)/2,ny/2+1]]+solution[((nx+1)/2,ny/2+2]])/DX^2)+ModNi((solution[((nx+1)/2-1,ny/2+1]]-2

solution[((nx+1)/2,ny/2+1]]+solution[((nx+1)/2+1,ny/2+1]])/DY^2))

-7104.6

MomentoY=-DNum(ModNi((solution[((nx+1)/2,ny/2]]-2

solution[((nx+1)/2,ny/2+1]]+solution[((nx+1)/2,ny/2+2]])/DX^2)+((solution[((nx+1)/2-1,ny/2+1]]-2

solution[((nx+1)/2,ny/2+1]]+solution[((nx+1)/2+1,ny/2+1]])/DY^2))

-4442.13

VIII.2.3 *Maglia di lato 100 mm*

Numero di Differenze Finite e Passo

DX=100;

DY=100;

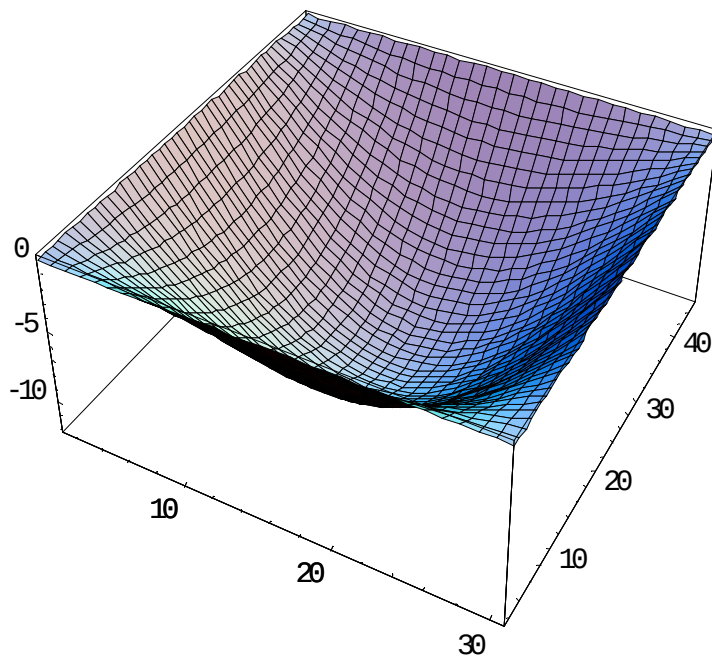
nx=bNum/DX

45

ny=aNum/DY

30

Essendo gli altri passaggi analoghi a quelli visti in precedenza si riportano di seguito direttamente i risultati ottenuti:



```
solution[[(nx+1)/2,ny/2+1]]
```

```
-12.0449
```

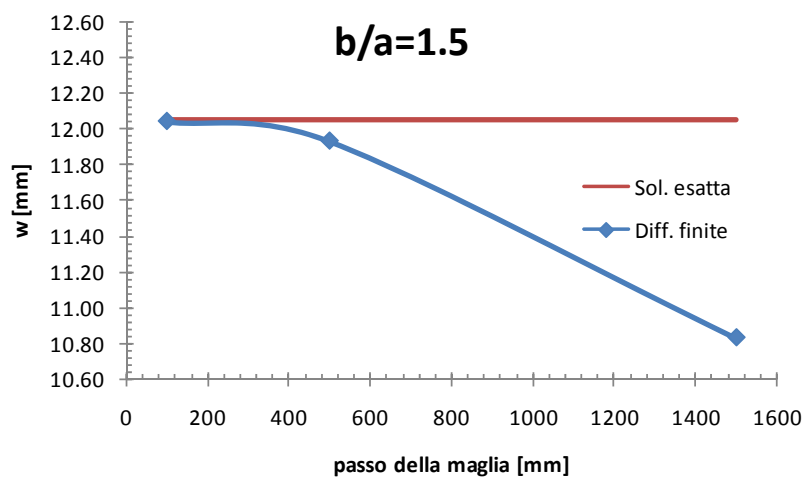
Calcolo Momenti flettenti

```
MomentoX=-DNum(((solution[[(nx+1)/2,ny/2]]-2
solution[[(nx+1)/2,ny/2+1]]+solution[[(nx+1)/2,ny/2+2]])/DX^2)+ModNi((solution[[(nx+1)/2-1,ny/2+1]]-2
solution[[(nx+1)/2,ny/2+1]]+solution[[(nx+1)/2+1,ny/2+1]])/DY^2))
```

```
-7296.25
```

```
MomentoY=-DNum(ModNi((solution[[(nx+1)/2,ny/2]]-2
solution[[(nx+1)/2,ny/2+1]]+solution[[(nx+1)/2,ny/2+2]])/DX^2)+((solution[[(nx+1)/2-1,ny/2+1]]-2
solution[[(nx+1)/2,ny/2+1]]+solution[[(nx+1)/2+1,ny/2+1]])/DY^2))
```

```
-4484.18
```



VIII.3 *Piastra Rettangolare (b/a=2)*

Dati numerici

aNum=3000;

bNum=6000;

sNum=30;

ModE=210000;

ModNi=0.3;

DNum=ModE/(1-ModNi^2) sNum^3/12

5.19231×10^8

pNum=0.01;

VIII.3.1 *Maglia di lato 1500 mm*

Numero di Differenze Finite e Passo

DX=1500;

DY=1500;

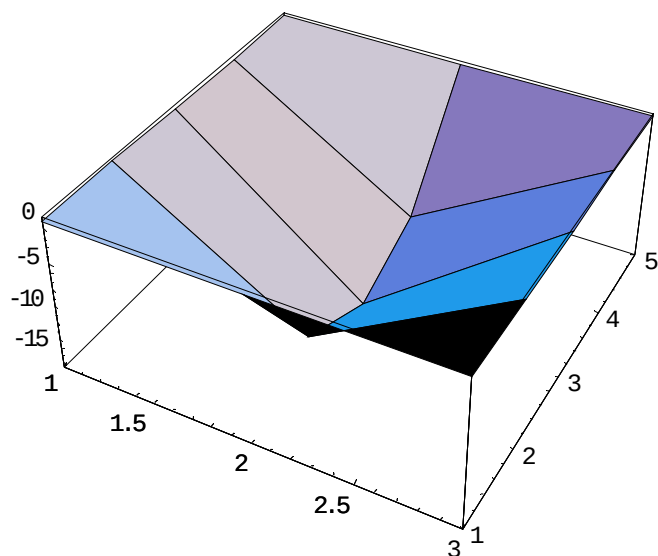
nx=bNum/DX

4

ny=aNum/DY

2

ListPlot3D[solution]



solution;

MatrixForm[solution]

$$\begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0. & -12.9337 & -6.74893 \times 10^{-15} \\ -4.22949 \times 10^{-15} & -16.9133 & 4.62888 \times 10^{-16} \\ 9.98981 \times 10^{-16} & -12.9337 & -1.59863 \times 10^{-15} \\ 0. & -3.78481 \times 10^{-15} & 0. \end{pmatrix}$$

solution[[nx/2+1,ny/2+1]]

-16.9133

Calcolo Momenti flettenti

MomentoX=-DNum(((solution[[nx/2+1,ny/2]]-2
solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+1,ny/2+2]])/DX^2)+ModNi((solution[[{nx}/2,ny/2+1]]-2
solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+2,ny/2+1]])/DY^2))

-8357.14

MomentoY=-DNum(ModNi((solution[[{nx}/2+1,ny/2]]-2
solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+1,ny/2+2]])/DX^2)+((solution[[{nx}/2,ny/2+1]]-2
solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+2,ny/2+1]])/DY^2))

-4178.57

VIII.3.2 Maglia di lato 500 mm

Numero di Differenze Finite e Passo

DX=500;

DY=500;

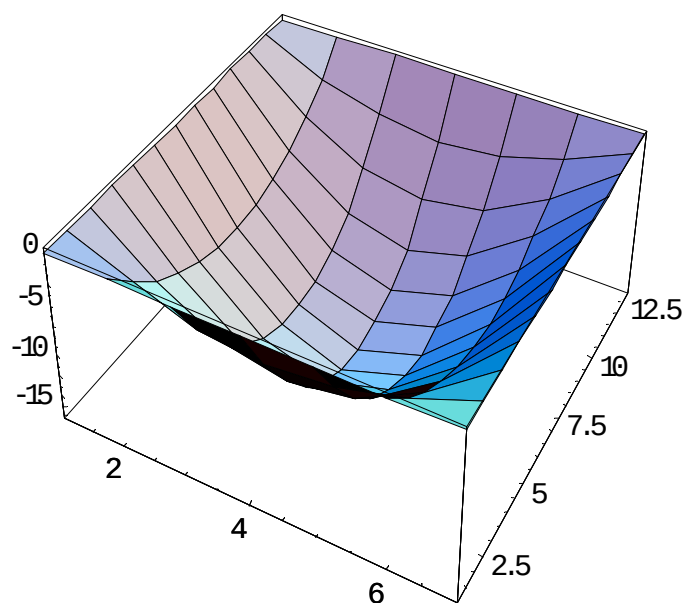
nx=bNum/DX

12

ny=aNum/DY

6

Essendo gli altri passaggi analoghi a quelli visti in precedenza si riportano di seguito direttamente i risultati ottenuti:



MatrixForm[solution]

0.	0.	2.16687×10^{-14}	-1.03463×10^{-14}	1.08311×10^{-14}	2.57717×10^{-15}	0.
2.20421×10^{-15}	-2.5907	-4.37762	-5.00766	-4.37762	-2.5907	-4.3503×10^{-15}
1.26278×10^{-15}	-4.71318	-8.00428	-9.172	-8.00428	-4.71318	4.56987×10^{-15}
9.48975×10^{-15}	-6.28139	-10.702	-12.2777	-10.702	-6.28139	1.81201×10^{-14}
-1.76566×10^{-14}	-7.33301	-12.5171	-14.3703	-12.5171	-7.33301	-1.24898×10^{-14}
1.00061×10^{-14}	-7.93137	-13.5514	-15.5636	-13.5514	-7.93137	1.16632×10^{-14}
9.93071×10^{-15}	-8.12496	-13.8863	-15.95	-13.8863	-8.12496	-6.19792×10^{-15}
-1.89618×10^{-14}	-7.93137	-13.5514	-15.5636	-13.5514	-7.93137	-4.963×10^{-15}
1.7948×10^{-14}	-7.33301	-12.5171	-14.3703	-12.5171	-7.33301	-9.25101×10^{-15}
5.97685×10^{-15}	-6.28139	-10.702	-12.2777	-10.702	-6.28139	-1.24016×10^{-14}
2.53875×10^{-15}	-4.71318	-8.00428	-9.172	-8.00428	-4.71318	-1.59348×10^{-15}
-4.22237×10^{-15}	-2.5907	-4.37762	-5.00766	-4.37762	-2.5907	-4.16944×10^{-16}
0.	-7.08157×10^{-16}	-2.36622×10^{-16}	-8.03894×10^{-16}	3.87641×10^{-16}	1.0782×10^{-15}	0.

solution[[nx/2+1,ny/2+1]]

-15.95

MomentoX=-DNum(((solution[[nx/2+1,ny/2]]-2

solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+1,ny/2+2]])/DX^2)+ModNi((solution[[{nx}/2,ny/2+1]]-2

solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+2,ny/2+1]])/DY^2))

-9053.73

MomentoY=-DNum(ModNi((solution[[{nx}/2+1,ny/2]]-2

solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+1,ny/2+2]])/DX^2))+((solution[[{nx}/2,ny/2+1]]-2

solution[[{nx}/2+1,ny/2+1]]+solution[[{nx}/2+2,ny/2+1]])/DY^2))

-4176.79

VIII.3.3 Maglia di lato 100 mm

Numero di Differenze Finite e Passo

DX=100;

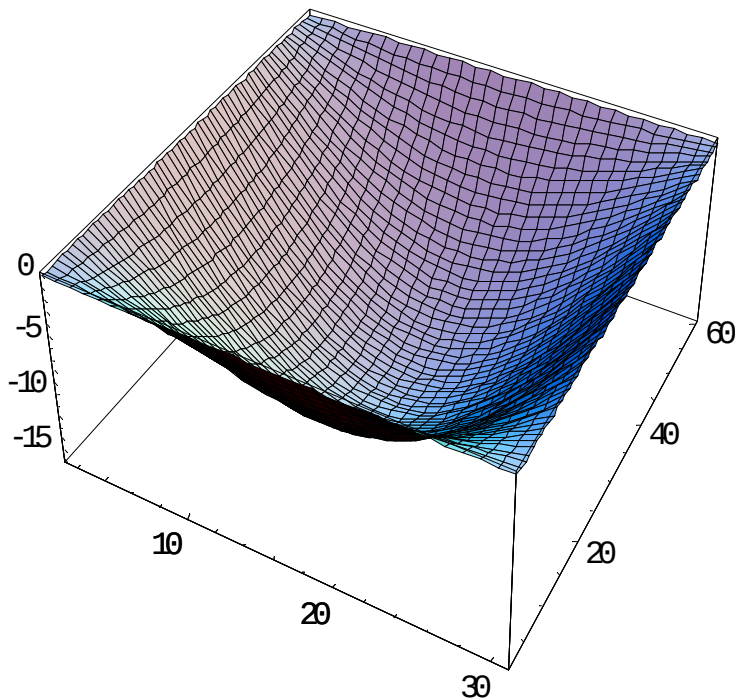
DY=100;

$n_x = b_{\text{Num}} / DX$

60

$n_y = a_{\text{Num}} / DY$

30



$\text{solution}[(n_x/2+1, n_y/2+1)]$

-15.8068

MomentoX=-DNum((($\text{solution}[(n_x/2+1, n_y/2)]$)-2
 $\text{solution}[(n_x/2+1, n_y/2+1)]$ + $\text{solution}[(n_x/2+1, n_y/2+2)]$)/DX^2)+ModNi(($\text{solution}[(n_x/2, n_y/2+1)]$)-2
 $\text{solution}[(n_x/2+1, n_y/2+1)]$ + $\text{solution}[(n_x/2+2, n_y/2+1)]$)/DY^2))

-9147.52

MomentoY=-DNum(ModNi(($\text{solution}[(n_x/2+1, n_y/2)]$)-2
 $\text{solution}[(n_x/2+1, n_y/2+1)]$ + $\text{solution}[(n_x/2+1, n_y/2+2)]$)/DX^2)+(($\text{solution}[(n_x/2, n_y/2+1)]$)-2
 $\text{solution}[(n_x/2+1, n_y/2+1)]$ + $\text{solution}[(n_x/2+2, n_y/2+1)]$)/DY^2))

-4171.76

