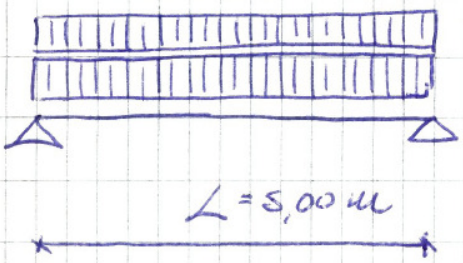
a cura di: Carmine Lima
clima@unisa.it
www.carminelima.altervista.org

Esercizio n. 1 - Progetto e Verifica di Sezioni Rettangolari allo SLU



$q_K = 20$ KN/m

$g_K = 15$ KN/m

Acciaio B450C

Calcestr. C20/25

Calcolo delle caratteristiche meccaniche di materiali

$R_{ck} = 25$ MPa

$f_{ck} = 0,83 \cdot R_{ck} = 20,75$ MPa

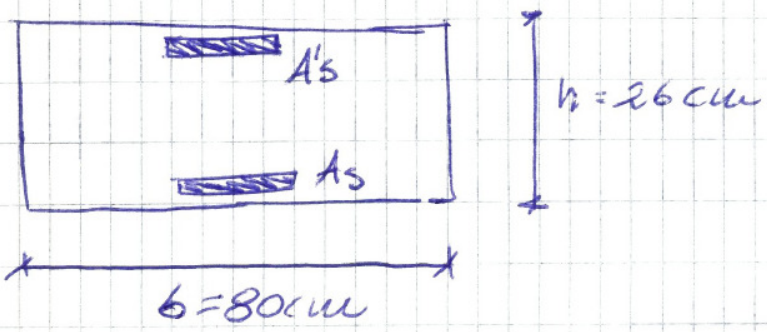
$$f'_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0,85 \cdot 20,75}{1,5} = 11,75 \text{ MPa}$$

$f_{sk} = 450$ MPa

$$f_{sd} = \frac{f_{sk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1,15} = 391,30 \text{ MPa}$$

$\varepsilon_{yd} = 0,9 \cdot A_g = 0,9 \cdot 7,5\% = 6,75\%$

Caratteristiche della sezione



A sezione assegnata progettare le armature A'_s e A_s

La sezione dovrà presentare un momento ultimo M_{Rd} uguale o superiore al momento ~~[illegible]~~ sollecitante M_{Sd}.

$$M_{Sd} = \frac{q_d \cdot l^2}{8}$$

$$q_d = 1{,}3\, g_k + 1{,}5\, q_k = 49{,}5 \text{ kN/m}$$

$$M_{Sd} = \frac{49{,}5 \cdot 5^2}{8} = 154{,}69 \text{ kNm}$$

Ragionando in termini adimensionali:

$$\mu_{Rd} = \mu_{Sd} = \frac{M_{Sd}}{b\, h^2 f'_{cd}} = 0{,}2434$$

Considerando l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto all'armatura tesa che fornisce M_{Rd} per il caso di flessione semplice si ha:

$$M_{Rd} = \varphi\, b\, y_c\, f'_{cd} (h - d' - \lambda y_c) + A'_s\, \sigma'_s (h - 2d')$$

in forma adimensionale (dividendo per $b h^2 f'_{cd}$)

$$\mu_{Rd} = \varphi\, \xi (1 - \delta' - \lambda \xi) + \omega' (1 - 2\delta')$$

$\mu_{Rd} = \mu_c + \mu'_s$ (visto come somma del momento resistente offerto dal cls e quello offerto dall'armatura compressa)

$$\mu_{Rd} = \mu_{Sd} = \mu_c + \mu'_s = 0{,}2434$$

Assumendo $\xi = 0{,}25$ per garantire un certo grado di duttilità alla struttura

$$\mu_c = \varphi \xi (1 - \delta' - \lambda \xi) = 0{,}8 \cdot 0{,}25 \left(1 - \frac{3}{26} - 0{,}4 \cdot 0{,}25\right) =$$

$$= 0{,}1569$$

Risultando $\mu_c < \mu_{Sd}$ si evince che il solo cls non è sufficiente e sarà necessario inserire un certo quantitativo di armatura compressa per ottenere $\mu_{Rd} \geq \mu_{Sd}$ in particolare

$$\mu'_s = \mu_{Sd} - \mu_c = 0{,}2434 - 0{,}1569 = 0{,}0865$$

essendo

$$\mu'_s = \omega'(1 - 2\delta') \Rightarrow \omega' = \frac{\mu'_s}{1 - 2\delta'} = \frac{0{,}0865}{1 - 2 \cdot \frac{3}{26}} = 0{,}1125$$

essendo

$$\omega' = \frac{A'_s \cdot f_{sd}}{b\, h\, f'_{cd}} \Rightarrow A'_s = \omega' \frac{b\, h\, f'_{cd}}{f_{sd}} = 702{,}7\ mm^2$$

A'_s è realizzabile con $4\phi16 \rightarrow A'_s = 8{,}04\ cm^2$

L'armatura tesa A_s è determinabile dall'equilibrio alla traslazione in forma adimensionale:

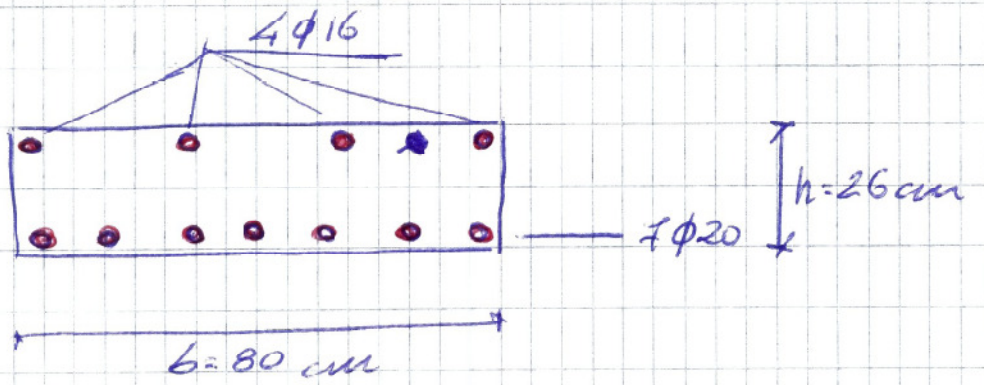
$$\varphi \xi + \omega' - \omega = 0 \Rightarrow \omega = \varphi \xi + \omega' = 0{,}8 \cdot 0{,}25 + 0{,}1125 =$$

$$= 0{,}3125$$

e dunque

$$A_s = \omega \frac{b h f'_{cd}}{f_{sd}} = 0{,}3125 \cdot \frac{800 \cdot 260 \cdot 11{,}75}{391{,}30} = 1981{,}8 \ mm^2$$

realizzabile con $7\phi20$ $A_s = 21{,}98 \ cm^2$



Verifica

Si calcola l'asse neutro ipotizzando le armature entrambe snervate

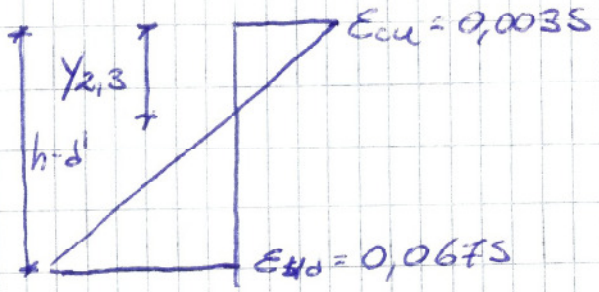
$$\varphi b y_c f'_{cd} + A'_s f_{sd} - A_s f_{sd} = 0$$

$$0{,}8 \cdot 800 \cdot y_c \cdot 11{,}75 + 804 \cdot 391{,}3 - 2198 \cdot 391{,}8 = 0$$

$$\Downarrow$$

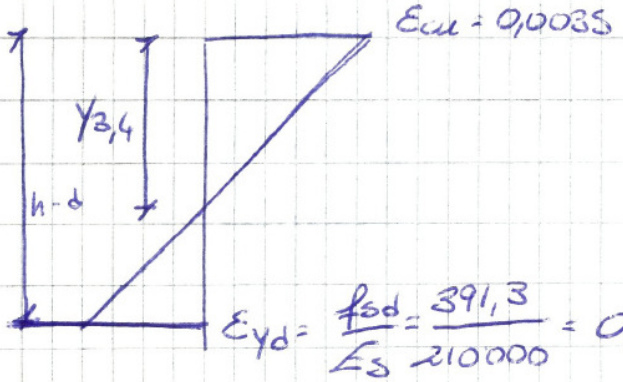
$$y_c = \frac{2198 \cdot 391{,}8 - 804 \cdot 391{,}3}{0{,}8 \cdot 800 \cdot 11{,}75} = 72{,}5 \ mm = 7{,}25 \ cm$$

Occorre verificare se l'ipotesi è rispettata



$$\frac{\varepsilon_{cu}}{y_{2,3}} = \frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}}{h - d'}$$

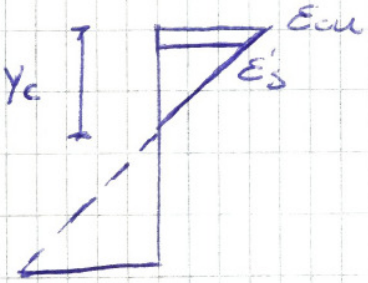
$$y_{2,3} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} (h - d') = 1{,}13 \ cm$$



$$y_{3,4} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+\varepsilon_{yd}}(h-d') = 15{,}19 \text{ cm}$$

essendo $y_c < y_{3,4}$ → l'armatura inferiore è snervata

per A'_s occorre determinare ε'_s



$$\frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} = \frac{\varepsilon'_s}{y_c - d}$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c}(y_c - d) = 0{,}0020$$

$$\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}\left(=\frac{f_{sd}}{E_s}\right) \rightarrow A'_s \text{ è snervata}$$

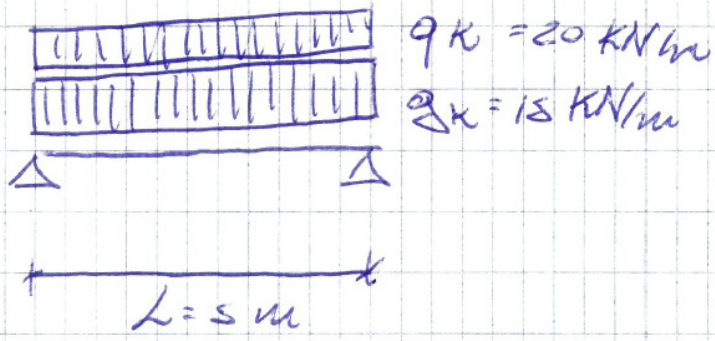
L'ipotesi di partenza è verificata e quindi con l'asse neutro determinato si può valutare il momento resistente.

$$M_{Rd} = \psi b y_c f'_{cd}(h - d' - \lambda y_c) + A'_s f_{sd}(h - 2d') =$$

$$= 0{,}8\, 800 \cdot 12{,}5 \cdot 11{,}75 (260 - 30 - 0{,}4 \cdot 12{,}5) + 804 \cdot 391{,}3 (260 - 2 \cdot 30) =$$

$$= 172{,}51 \text{ kNm} > M_{Sd} \quad (\text{Verificato!})$$

Ex. n. 2 - Progetto e Verifica di una sezione Emergente



B 450 C

C 20/25

Caratteristiche Materiali

$R_{ck} = 25$ MPa

$f_{ck} = 0{,}83 \cdot 25 = 20{,}75$ MPa

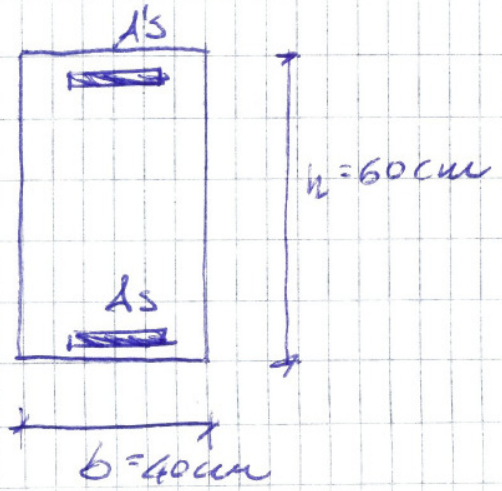
$$f'_{cd} = \frac{\alpha_{cc} f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{0{,}85 \cdot 20{,}75}{1{,}5} = 11{,}75 \text{ MPa}$$

$f_{sk} = 450$ MPa

$$f_{sd} = \frac{f_{sk}}{\gamma_s} = 391{,}3 \text{ MPa}$$

$\varepsilon_{ud} = 0{,}9 \cdot A_g = 6{,}75\%$

Sezione



A sezione Assegnata progettare A's e As

$$M_{Sd} = \frac{q_d L^2}{8}$$

$$q_d = 1{,}3 g_k + 1{,}5 q_k = 49{,}5 \text{ kN/m}$$

$$M_{Sd} = 154{,}69 \text{ kNm}$$

In forma Adimensionale

$$\mu_{Rd} = \mu_c + \mu'_s = \mu_{Sd} = \frac{M_{Sd}}{b \cdot h^2 \cdot f'_{cd}} = \frac{154{,}69 \cdot 10^6}{400 \cdot 600^2 \cdot 11{,}75} = 0{,}0914$$

Considerando $\xi = 0{,}25$

$$\mu_c = \psi \xi (1 - \delta' - \lambda \xi) = 0{,}8 \cdot 0{,}25 \left(1 - \frac{3}{26} - 0{,}4 \cdot 0{,}25\right) = 0{,}1569$$

essendo $\mu_c > \mu_{Sd}$ significa che il solo cls è sufficiente in zona compressa e quindi non è necessario inserire armatura in zona compressa $\mu'_s = 0$

È necessario rivalutare l'asse neutro in modo che risulti: $\mu_c = \mu_{Sd}$

$$\mu_c = \psi \xi (1 - \delta' - \lambda \xi) = \mu_{Sd}$$

$$\psi \xi - \psi \xi \delta' - \lambda \psi \xi^2 = \mu_{Sd}$$

$$-\lambda \psi \xi^2 + (\psi - \psi \delta') \xi - \mu_{Sd} = 0 \rightarrow \xi = \frac{-\psi + \psi \delta' \pm \sqrt{(\psi - \psi \delta')^2 - 4 \lambda \psi \mu_{Sd}}}{-2 \lambda \psi}$$

$$\xi = \begin{cases} 0{,}1377 \\ \cancel{2{,}0738} \quad \text{No} \end{cases}$$

il reale asse neutro è $\xi = 0{,}1377$

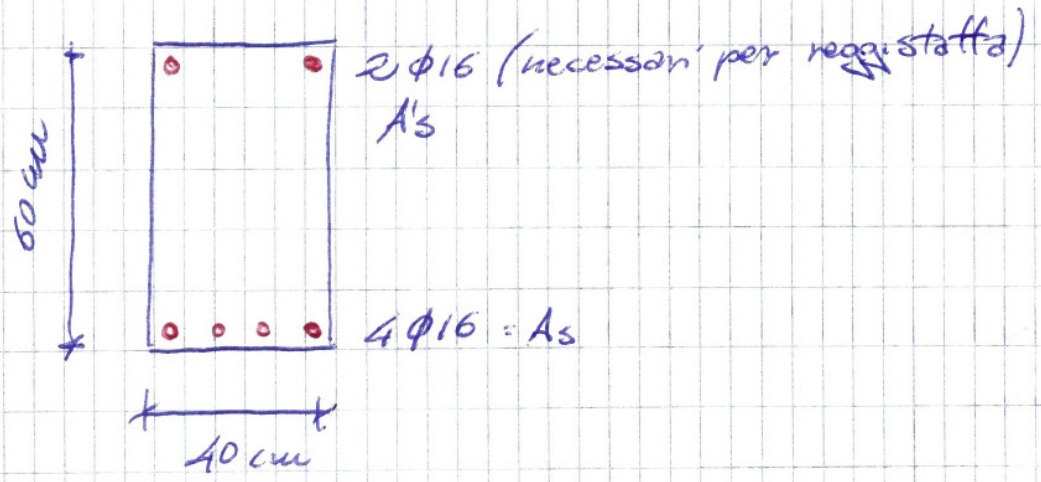
A_s si determina con un equilibrio alla traslazione

$$\varphi \xi - \omega = 0$$

$$\omega = \varphi \xi = 0{,}8 \cdot 0{,}1377 = 0{,}1102$$

$$A_s = \omega \frac{b h f'_{cd}}{f_{sd}} = 0{,}1102 \cdot \frac{400 \cdot 600 \cdot 14{,}75}{391{,}3} = 794{,}2 \ mm^2$$

realizzabile con $4\phi16$ $A_s = 8{,}04 \ cm^2$



<u>Verifica</u>

Calcolo y_c ipotizzando A'_s e A_s snervate

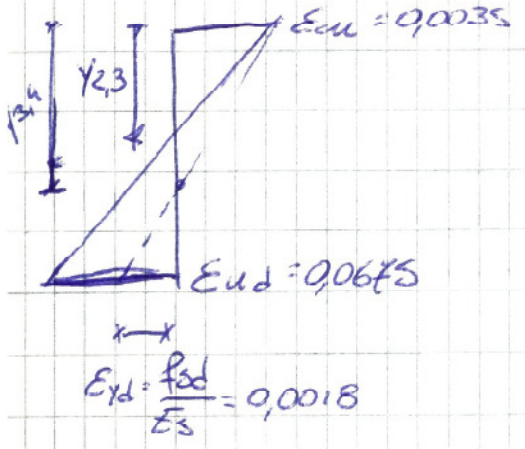
$$\varphi b y_c f'_{cd} + A'_s f_{sd} - A_s f_{sd} = 0$$

$$0{,}8 \cdot 400 \cdot y_c \cdot 11{,}75 + 402 \cdot 391{,}3 - 804 \cdot 391{,}3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y_c = \frac{804 \cdot 391{,}3 - 402 \cdot 391{,}3}{0{,}8\, 400\, 11{,}75} = 41{,}8 \text{ mm} = 4{,}18 \text{ cm}$$

Occorre verificare se le armature sono realmente snervate.

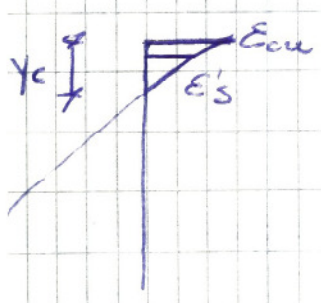


$$y_{2,3} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} (h - d') = 2{,}81 \text{ cm}$$

$$y_{3,4} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} (h - d') = 37{,}64 \text{ cm}$$

essendo $y_c < y_{3,4}$ A_s é snervata

verificare se ε'_s é snervata



$$\frac{\varepsilon_{cu}}{y_c} = \frac{\varepsilon'_s}{y_c - d'} \Rightarrow \varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c}(y_c - d') = 0{,}0010$$

$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow A'_s$ non é snervata; occorre ricalcolare l'asse neutro ponendo questa condizione

$$\varphi b\, y_c\, f'_{cd} + A'_s\, E_s \cdot \varepsilon'_s - A_s\, f_{sd} = 0$$

$$\varphi b\, y_c\, f'_{cd} + A'_s E_s \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c}(y_c - d') - A_s f_{sd} = 0$$

$$0{,}8 \cdot 400 \cdot y_c \cdot 11{,}75 + 402 \cdot 210000 \cdot \frac{0{,}0035}{y_c}(y_c - 30) - 804 \cdot 391{,}3 = 0$$

$$3760\, y_c + \frac{295470}{y_c}(y_c - 30) - 314605{,}2 = 0$$

$$3760\, y_c^2 + 295470\, y_c - 8549494{,}8 = 0$$

$$y_c = \frac{-295470 \pm \sqrt{295470^2 + 4 \cdot 3760 \cdot 8549494{,}8}}{2 \cdot 3760} = \begin{cases} 22{,}50 \text{ mm} \\ -101{,}08 \text{ mm} \end{cases}$$

$$y_c = 2{,}25 \text{ cm}$$

La condizione $y_c < d'$ conduce a considerare l'armatura A'_s tesa anziché compressa; a vantaggio di sicurezza tale armatura sarà trascurata al fine di calcolare M_{Rd}

$$M_{Rd} = \varphi b\, y_c\, f'_{cd}\left(\frac{h}{2} - \lambda y_c\right) + A_s f_{sd}\left(\frac{h}{2} - d'\right) =$$

$$= 0{,}8 \cdot 400 \cdot 22{,}5 \cdot 11{,}75\,(300 - 0{,}4 \cdot 22{,}5) + 804 \cdot 391{,}3\,(300 - 30) = 109{,}56 \text{ kNm}$$

$M_{Rd} < M_{Sd}$ verifica non soddisfatta; si incrementa l'armatura in zona tesa a $6\phi16$ $A_s = 12{,}06 \text{ cm}^2$

$$y_c = \frac{1206 \cdot 391{,}3 - 402 \cdot 391{,}3}{0{,}8 \cdot 400 \cdot 11{,}75} = 83{,}7 \text{ mm} = 8{,}37 \text{ cm}$$

essendo $y_{2,3} < y_c < y_{34}$

A_s è snervata e occorre verificare ε'_s

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_c}(y_c - d') = 0{,}0022 > \frac{f_{sd}}{E_s} \quad \text{è snervata}$$

l'asse neutro è proprio 8,37 cm

$$M_{Rd} = \varphi b y_c f'_{cd}\left(\frac{h}{2} - \lambda y_c\right) + A'_s f_{sd}\left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_{sd}\left(\frac{h}{2} - d'\right) =$$

$$= 0{,}8 \cdot 400 \cdot 83{,}7 \cdot 11{,}75\,(300 - 0{,}4 \cdot 83{,}7) + 402 \cdot 391{,}3\,(300 - 30) +$$

$$+ 1206 \cdot 391{,}3 \cdot (300 - 30) = 259{,}47 \text{ kNm}$$

$M_{Rd} > M_{Sd}$ (Verificato!)